PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 18. 15. September 1920. Redaktionsschluß für No. 20 am 10. September 1920. 21. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

K. W. F. Kohlrausch, Beiträge zur Farbenlehre. III. Bemerkungen zur Ostwaldschen Theorie der Pigmentfarben. S. 473.

F. Streintz, Die Polarität einer Aluminiumzelle. S. 477.

K. Przibram, Über die elektrischen Figuren. II. S. 480.

E. Kretzschmann, Der Liouvillesche Satz und die Relativitätstheorie. S. 484.

H. Dingler, Der starre Körper. S. 487.

O. Meißner, Kolorimetrische Untersuchungen. VI. S. 493.

M. Wolfke, Über die Möglichkeit der optischen Abbildung von Molekulargittern. S. 495.

A. Müller, Über eine physiologische Erklärung der Referenzflächen der Gestirne. S. 497.

K. Horovitz, Über die scheinbare Verkleinerung entfernter Objekte. S. 499.

Zusammenfassende Bearbeitungen:

H. Spohn, Neuere Arbeiten über Beugung an Zylindern und Gittern. (Fortsetzung.) S. 501.

Tagesereignisse. S. 504.

Personalien. S. 504.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Beiträge zur Farbenlehre. III.

Bemerkungen zur Ostwaldschen Theorie der Pigmentfarben.

Von K. W. Fritz Kohlrausch.

Von der Voraussetzung ausgehend, „daß man sich bis jetzt außerstande gesehen hat, eine Farbe nach Maß und Zahl zu kennzeichnen" und „daß ein grundsätzlicher Aufbau der Farbenlehre von ihren Elementen aus notwendig ist, um dieses Gebiet der exakten Wissenschaft anzugliedern", hat W. Ostwald[1]) versucht eine Theorie der Pigmentfarbe aufzustellen. In den beiden vorhergehenden Mitteilungen[2]) habe ich gezeigt, daß diese Voraussetzung eine irrige ist und daß Maß und Zahl der Farbe sehr wohl ihren Platz haben in der Helmholtzschen Theorie. Gerade diese ihre Fähigkeit zu quantitativen Aussagen ist es ja, die sie vor der phänomenologischen Auffassung Herings auszeichnet. Eine Neuorientierung der Farbenlehre aus diesem Grunde ist daher nicht nötig. Und daß im speziellen die von Ostwald vorgeschlagene Neuorientierung keine glückliche ist, glaube ich im folgenden zeigen zu können.

Grundlage für eine Systematik der Pigmentfarbe muß selbstverständlich die Remissionsfunktion sein. Als Beispiel, an welchem die notwendigen Erläuterungen durchgeführt werden sollen, betrachte man Fig. 1, in der die ausgezogene Kurve die Remissionsfunktion darstellt für das reinste goldgelbe Pigment *pa* Nr. 13, das der Ostwaldsche Farbenatlas enthält und dessen Farbton (vgl. Tab. IV in der 1. Mitteilg.) einem Spektrallicht der Wellenlänge $\lambda = 585$ entspricht. Es sind deutlich zwei Bezirke zu unterscheiden, das Remissionsgebiet (abgekürzt: R.G.) für $\lambda > 570\,\mu\mu$, wo etwa 75 Proz. derjenigen Lichtmenge reflektiert wird, die das weiße Vergleichspapier reflektiert, und das Absorptionsgebiet (A.G.) für $\lambda < 570\,\mu\mu$, wo der reflektierte Betrag nur 8 Proz. erreicht und 92 Proz. absorbiert werden. Nun versteht Ostwald unter einem idealen Pigment ein solches, wo im R.G. die Remission dieselbe ist, wie die eines ideal weißen Körpers, also die Ordinate den Wert 1 bekommt, und wo im A.G. die Absorption dieselbe ist, wie die eines absolut schwarzen Körpers, also das ganze Licht verschluckt und die Ordinate gleich Null wird. Die Abweichungen von diesem Idealfall werden als Schwärzlichkeit bzw. Weißlichkeit definiert. Denn würde das remittierte Licht dadurch geschwächt, daß ein Teil der Pigmentkörner durch absolut schwarze Körner ersetzt wird, so werden die Ordinaten der ganzen Kurve gegen Null streben; im A.G. sind sie bereits Null, hier ändert sich nichts. Im R.G. geht die gemeinsame Ordinate um so mehr zurück, je mehr von den idealen Pigmentkörnern durch lichtloses Schwarz verdrängt werden. In Wirklichkeit werden die Verhältnisse ein wenig geändert dadurch, daß vollkommen schwarze Pigmente nicht zur Verfügung stehen und außerdem die stets vorhandene Remission an der äußersten Oberfläche, die cet. par. für bunte und unbunte Pigmente gleich ausfällt, nicht vermieden werden kann. Statt dem idealen Werte Null werden alle Ordinaten einem kleinen positiven Wert zustreben, so wie dies in Fig. 1 der Fall ist, wo die punktierten Kurven an solchen schwärzlichen Abkömmlingen, bezeichnet mit *pc*, *pe*, *pg* . . ., des Goldgelb *pa* gemessen wurden. Bestimmt man demnach auf irgend einem Wege die Höhe h_r der Ordinate im R.G., so gibt ihre Abweichung vom idealen Wert, das ist also $1 - h_r = s$, jenen Bruchteil sämtlicher Körner an, die absolut schwarz sind. Ist z. B. $h_r = 0{,}75$, so ist ein Viertel der Körner

1) Diese Zeitschr. 17, 322 u. 352, 1916.
2) Diese Zeitschr. 1920.

schwarz; die anderen drei Viertel können weiß oder bunt sein, da beide Kernarten im Idealfall die Ordinate 1 im Remissionsgebiet haben. — Ersetzt man andererseits einen Teil der Körner eines idealen Pigmentes durch weiße Körner, so kann sich im R.G., wo die Remission ohnedies schon ideal ist, nichts ändern, und nur im A.G. wird die Ordinate im selben Maße gehoben, als die hier lichtlosen Pigmentkörner durch Weiß verdrängt werden; sind sie gänzlich ersetzt, dann ist auch im A.G. die Ordinate überall eins. Erfolgte die Zumischung von Weiß nicht zu einem idealen Pigment, sondern zu einem solchen, das bereits Schwarz enthielt ($h_r < 1$), so wird der Erfolg nicht nur eine Erhöhung der Ordinate im A.G., sondern auch im R.G. sein, da die Remission auch hier durch das allmähliche Verdrängen der schwarzen Körner verbesserungsfähig ist. Man vergleiche die gestrichelten, mit *ia*, *ia*, *ga* . . . beschriebenen Kurven der Fig. 1, die für die weißlichen Ab-

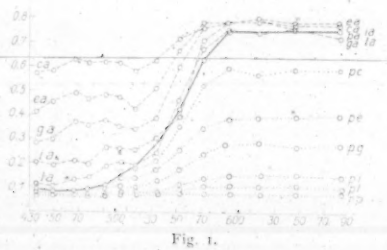


Fig. 1.

kömmlinge des *pa* aufgenommen wurden. Mißt man also wiederum die Abweichung der Ordinate h_a im A.G. vom Idealwerte Null, so erhält man in $h_a = w$ ein Maß für die Anzahl der zugemischten weißen Körner. Ist z. B. $h_a = 0{,}33$, so ist ein Drittel der Körner weiß. Die anderen zwei Drittel können bunt oder schwarz sein, da beide Arten sich im A.G. gleichartig verhalten, nämlich lichtlos sind. Hat man aber sowohl h_a als h_r bestimmt, so ist der Aufteilungsschlüssel gegeben, denn in unserem Beispiel wären 25 Proz. schwarze und 33 Proz. weiße Körner, also muß der Rest, das sind 42 Proz., der Körner bunt sein. — Ist Oberflächenreflexion vorhanden, oder sind die verwendeten Kernarten nicht ideal schwarz, weiß oder bunt, so wird man aus den Größen h_a und h_r nicht mehr auf die wahre Kernverteilung schließen, sondern nur sagen können: das Pigment remittiert so, wie wenn 25 Proz. der Körner ideal schwarz, 33 Proz. ideal weiß, 42 Proz. ideal bunt wären. Oder man gibt das Resultat direkt in Farbanteilen an und sagt:

$$h_a = w = \text{Weißgehalt},$$
$$1 - h_r = s = \text{Schwarzgehalt},$$
$$1 - s - w = h_r - h_a = f = \text{Farbgehalt}.$$

So entsteht die Beziehung

$$s + w + f = 1,$$

welche Grundgleichung das ganze Ostwaldsche Farbensystem beherrscht und in ihrer Bedeutung für die Farbenlehre wohl nicht ganz zutreffend mit der Stellung des Ohmschen Gesetzes in der Elektrizität verglichen wird. — Verallgemeinernd wird nun jede Pigmentfarbe als eindeutig definiert angesehen, für die der Farbton durch Vergleich mit einem numerierten Standardfarbkreis, der Weißgehalt durch Bestimmung der kleinsten Ordinate h_a, der Schwarzgehalt durch Bestimmung der größten Ordinate h_r gegeben ist. Dabei erfolgt die Eruierung von h_a und h_r durch den Vergleich des Pigmentes mit einer Grauskala unter Vorschaltung von Sperr- und Passier-Filtern. Diese experimentelle Durchführung ist zwar primitiv, aber jedenfalls rasch und einfach und führt zu Zahlenwerten, die denen der exakten und gleich verwerteten Messung nicht viel nachstehen, wie folgendes Beispiel zeigt. Aus Fig. 1, bzw. den dazu gehörigen Zahlen, wurden die Werte für h_a (Minimalwert) und h_r (Maximalwert) aufgesucht und die daraus sich ergebenden Daten für $w = h_a$ und $s = 1 - h_r$ zusammengestellt mit den Angaben, die auf der Rückseite der untersuchten Farbblättchen angeführt sind. Erstere sind unter F.K., letztere unter W.O. eingeschrieben. Bis auf die mit * bezeichneten Zahlen ist die Übereinstimmung recht gut, für praktische Zwecke jedenfalls genügend. — Man wird zugeben müssen, daß diese Beschreibung des Pigmentes und seiner Abwandlungen eine anschauliche und im ersten Moment bestechend einfache ist. —

		weißliche Abkömmlinge						schwärzliche Abkömmlinge					
		ca	*ea*	*ga*	*ia*	*la*	*na*	*pa*	*pc*	*pe*	*pg*	*pi*	*pl*	*pn*
F.K.	w	0,57	0,42	0,28	0,19	0,10	0,08	0,08	0,06	0,05	0,07	0,06	0,05	0,05
	s	0,60	0,44	0,27	0,16	0,10	0,06	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04
F.K. W.O.	w	0,20	0,21	0,23	0,22	0,25	0,25	0,25	0,41	0,60	0,72	0,85	0,89	0,92
	s	0,20	0,16	0,15	0,19	0,08*	0,23	0,07*	0,40	0,60	0,75	0,84	0,90	0,94

Trotzdem ist sie grundsätzlich zu verwerfen. Denn die obige Definitionsgleichung stützt sich nur auf zwei ausgezeichnete Punkte der Remissionskurve; von der übrigen Kurvenform weiß die Farbenprüfung nichts. Zweifellos ist es aber der ganze Funktionsverlauf, der die Eigenschaften des Pigmentes bestimmt, und nicht nur ihr größter und kleinster Wert. Um daher der Grundgleichung die Daseinsberechtigung zu schaffen, ist Ostwald gezwungen, allen vorkommenden Pigmenten eine bestimmte Form der Remissionskurve vorzuschreiben, u. zw. derart, daß die Funktion überhaupt nur jene zwei Werte annehmen darf und daß die Breite der beiden Bezirke ganz bestimmten Bedingungen genügt. Man denke sich die Spektralfarben ergänzt durch die Purpurtöne und denke sich dieses in sich zurücklaufende Farbenband zu einem Farbenkreis zusammengebogen, auf dem die Farbtöne so verteilt werden, daß, wie wir dies gewohnt sind, komplementäre Farben auf den Enden der Durchmesser zu liegen kommen und so den Kreis in zwei gleiche Hälften, „Farbenhalbe", teilen. Und nun verlangt Ostwald: „daß zu einer gesättigten Farbe sämtliche Farben zusammenwirken müssen, welche innerhalb einer Hälfte des Farbenkreises liegen". Es ist nicht ganz klar, ob dieser Satz, der zwar (l. c. S. 328) ausdrücklich als Definition der gesättigten Farben deklariert wird, auch wirklich als Definition gemeint ist. Wäre das der Fall, so müßte darin einerseits etwas über den Grad des Zusammenmischens ausgesagt werden, andererseits müßte die Grundgleichung sich auf sie beziehen und eventuelle Abweichungen von der so definierten Sättigung berücksichtigen können. Beides trifft nicht zu, wohl erwähnt Ostwald an einigen Stellen, daß manche Pigmente Absorptionen zeigen, die über ein Farbenhalb hinausgehen: „Die Farbe ist alsdann ein Gemisch von gesättigter Farbe mit vorwiegend Schwarz" (S. 360). Diese Konstatierung ist aber offenbar eine außerhalb seines Meßprinzipes gewonnene Erfahrung, denn aus der Bestimmung von h_a und h_r ist sie nicht zu gewinnen. Es muß somit die Vorschrift über die Form der Remissionsfunktion, weil weder in der Grundgleichung noch in ihrer praktischen Verwendung bei der Farbenprüfung Abweichungen von der Vorschrift vorgesehen sind und berücksichtigt werden, als eine Voraussetzung aufgefaßt werden, und zwar als eine zur Existenzberechtigung der ganzen Theorie unbedingt nötige Voraussetzung.

Es ist mir nun nicht verständlich, wie Ostwald bei seiner gewiß sehr großen Erfahrung diesbezüglich zu dem Schluß kommen kann: „daß er (der Farbenhalb-Satz) im allgemeinen die Tatsachen richtig darstellt, scheint mir außer Zweifel zu stehen". Denn daß dies nicht, und zwar bei den blauen und grünen Pigmenten, die gut 40 Proz. aller Farben im Atlas einnehmen, auch nicht angenähert zutrifft, sieht man aus Fig. 2, wo für einige, den ganzen Farbkreis umfassende Repräsentanten die Remissionskurven eingezeichnet sind. Es

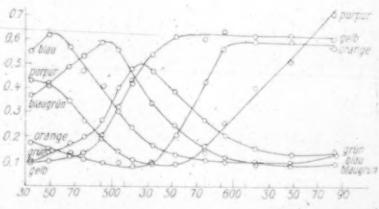


Fig. 2.

sind die Farben aus dem Farbkreis *nc* mit der Bezeichnung: Nr. 4 (gelb); Nr. 21 (orange); Nr. 38 (purpur); Nr. 54 (blau); Nr. 71 (blaugrün); Nr. 88 (grün). Weitere Beispiele sind aus den Tabellen I, II, III (1. Mitt.) erhältlich. Die Gruppe von gelb bis orange erfüllt die Voraussetzung, abgesehen von dem wenig schroffen Übergang zwischen A.G. und R.G., ganz gut; es sind „Vollfarben"; alle anderen Farben aber nicht mehr. Wie nun, wenn man tatsächlich ein Grün herstellt, das gleichen Farbton wie Nr. 88 hat und bei gleichem h_r und h_a eine Vollfarbe mit dem vorgeschriebenen breiten R.G. ist? Die Farbenprüfung wird keinen Unterschied machen, da sie nur das unveränderte h_a und h_r bemerkt. Wohl aber wird das Auge einen Unterschied bemerken, denn die Erregung im Auge hängt von der ganzen Kurvenform, nicht nur von den extremen Ordinaten ab. Ob man eine grüne Vollfarbe wirklich aufzeigen kann oder nicht, ist natürlich irrelevant für die prinzipielle Frage. Es kann ja morgen schon der Fall sein, wenn es auch heute noch nicht zutrifft; grundsätzliches Hindernis besteht keines. Und jedenfalls wird nach der Grundgleichung eine Farbe ganz in der gleichen Weise behandelt, ob sie eine Vollfarbe ist oder nicht; das Reinheitskriterium ist für das Gelb Nr. 4 und das Grün Nr. 88 dasselbe, trotz ihrer ganz verschiedenen Eigenschaften. Allein schon dieser Umstand, das Nichtzutreffen einer notwendigen Voraussetzung, scheint mir genügend zu sein, um vom prinzipiellen Standpunkt aus die Ostwaldsche Theorie abzulehnen.

Hätte man es aber selbst nur mit Vollfarben zu tun, so bleiben immer noch eine Reihe schwerwiegender Einwände. Es wird z. B. der nach Abzug des gemeinsamen kleinsten Wertes h_a überbleibende Remissionsrest $h_r - h_a = f$ als „reine Farbe" angesehen. Hier liegt eine Begriffsverwechslung vor, die dem Leser dieser Zeilen vielleicht weiter oben schon aufgefallen ist. Wohl darf man schließen, daß nach Abzug des dem weißen Kornanteiles proportionalen h_r nunmehr nur noch (ideal) farbige Pigmentkörner remittieren, daß die Remission des Pigmentes gereinigt ist von der Remission zugemischter weißer Körner. Deswegen braucht aber diese so gereinigte Remission noch nicht eine von weiß freie Empfindung hervorzurufen, also selbst „rein" zu sein. Nun steht das Definieren ja in gewissem Grade frei, soll aber doch im Einklange mit der Erfahrung bleiben. Unsere Erfahrung sagt aber, daß, wenn zwei benachbarte Spektralfarben (außer wenn sie in den geradlinigen Endstrecken, vgl. Fig. 1, 1. Mitt., liegen) additiv gemischt werden, das Ergebnis immer weißlicher ist, als jene Spektralfarbe, deren Farbton mit der Mischung übereinstimmt; die Mischung liegt also im Innern der reellen Farbfläche (1. Mitt.) und dem Weiß näher. Je breiter ein zusammenhängendes Spektralgebiet, das gemischt wird, ist, desto weißlicher wird die Mischfarbe. Und zwar um so deutlicher, aus je stärker gekrümmten Teilen der im Farbdreieck (Fig. 1) eingetragenen Spektralkurve die Komponenten genommen werden. Diese Erfahrung kann man sich jederzeit am Helmholtzschen Farbenmischapparat oder am Farbenkreisel verschaffen. Und entgegen dieser Erfahrung werden alle Farben, für die $h_r - h_a$ gleich ist, als gleich rein bezeichnet; es wird nicht berücksichtigt, daß das überall um h_a verkleinerte Remissionsgebiet immer noch weiß produziert und es werden z. B. alle Vollfarben als völlig rein mit dem gemeinsamen Reinheitswert 1 angesehen. Man vergleiche dazu die in Fig. 1, 1. Mitt., eingetragene Lage der Vollfarben im Farbendreieck, die in Übereinstimmung mit der Erfahrung die Inkonstanz der Weißlichkeit entlang dem Farbenkreis sofort erkennen läßt.

Ebensowenig nimmt die Definitionsgleichung, die den manuell gleichartigen Vorgang eines Zumischens von Pigment-Weiß oder Pigment-Schwarz auch gleichartig wertet, Rücksicht darauf, daß in den optischen Konsequenzen zwischen beiden Handlungen ein grundlegender Unterschied besteht: Das Zumischen von Schwarz bedeutet nur eine quantitative Änderung der Remissionskurve, indem alle Ordinaten um den gleichen Bruchteil verkleinert werden, die Remissionsfunktion also mit einem gemeinsamen Faktor multipliziert wird. Das Zumischen von Weiß dagegen bewirkt eine qualitative Änderung, indem die Proportionen der Ordinaten untereinander geändert werden, also eine neue Funktion entsteht. Erstere Veränderung kann stets durch eine entsprechende Änderung der Lichtstärke rückgängig gemacht werden, letztere nie. Daß die Empfindung dementsprechend sehr wohl einen Unterschied macht, konstatiert Ostwald selbst auf S. 359: Farben, deren unbunter Anteil aus 50 Proz. Weiß besteht, sehen viel farbloser aus als solche, die 50 Proz. Schwarz enthalten. Das ist keine „Sache der mangelnden Erfahrung" vielmehr ein Hinweis auf die mangelhafte Anpassung der Beschreibung an die Tatsachen.

Es scheint mir, als ob Ostwald in dem Umstand, daß sich experimentell die Neutralisationsverhältnisse zweier Komplementärfarben gleich ergeben haben mit ihren Reinheitsverhältnissen, einen Beweis gefunden zu haben glaubt, daß dem Reinheitsbegriff in der von ihm eingeführten Definition eine gewisse Realität zukäme. Doch ist diese experimentelle Tatsache eine selbstverständliche Folgerung seiner der Definition zugrunde liegenden Voraussetzung über das „Farbenhalb". Denn zwei komplementäre Vollfarben, die also jede exakt ihr Farbenhalb reflektieren, stückeln, additiv gemischt, ihre Remissionsgebiete zu einem das ganze Spektrum umfassenden R.G. zusammen; sie geben also dann miteinander weiß, wenn die Summe der Remissionsordinaten für alle Wellenlängenstellen die gleiche ist. Es sei

h_r die Ordinate im R.G.,

h_a die Ordinate im A.G. für die erste Farbe.

h'_r die Ordinate im R.G.,

h'_a die Ordinate im A.G. für die zweite Farbe,

so muß bei Mischung gleicher Anteile

$$h_r + h'_a = h_a + h'_r$$

sein, wenn die Mischung neutral sein soll. Daher

$$h_r - h_a = h'_r - h'_a$$

oder nach der Reinheitsdefinition

$$r = r'.$$

Das heißt, zwei Vollfarben geben nur dann im Verhältnis 1 : 1 gemischt weiß, wenn ihre nach Ostwald definierten Reinheiten gleich sind. In der Tat geben die in Fig. 1, 1. Mitt., eingetragenen Vollfarben, die durch entsprechendes Planimetrieren der Grundempfindungskurven erhalten wurden, Neutralisationsverhältnisse, die — berechnet aus ihren Abständen vom Weißpunkt und aus der ihnen zukommenden Gesamterregung $r + b + g$ — zwischen 1,00 und 1,04 liegen, während die Reinheitsverhältnisse

definitionsgemäß 1 sind. [Ein Widerspruch in der Hinsicht, daß die Reinheitsbestimmung absoluten, die Neutralisationsbestimmung individuellen Charakter hat, besteht nicht, denn je nach dem Individuum (oder je nach der Beleuchtung) ist die Einteilung des Farbenkreises und damit der Farbton der Komplementärfarben verschieden.] Aus dem Eintreffen dieser geforderten Beziehung im Experiment kann nur geschlossen werden, daß die Voraussetzungen erfüllt waren. Man kann daher folgern, daß in diesem Falle die verwendeten Pigmente — welche es sind, wird nicht angegeben — nahe Vollfarben gewesen sein müssen, sonst hätten sich nicht nur im grünen Teil Abweichungen ergeben.

Schließlich möchte ich noch einen Punkt erwähnen, der mir, so sehr ich mir Mühe gegeben habe, mich in den Gedankengang Ostwalds einzuleben, unverständlich geblieben ist. Ostwald schreibt so, wie wenn seine Pigmenttheorie die „Bezogenheit" einer Farbe erfassen würde. Nun ist es doch offenbar unmöglich ein vorgelegtes Pigment durch drei Koordinaten so zu definieren, daß dadurch im vorhinein alle jene Veränderungen charakterisiert sind, die sein Aussehen erleidet, wenn die Umgebung des Pigmentes variiert wird. Unter „Bezogenheit" versteht man aber doch die Abhängigkeit des Aussehens von der Art des Untergrundes, die Bewertung des Pigmentes relativ zu demselben. Vielmehr scheint mir das, was Ostwald Bezogenheit nennt, darin zu bestehen, daß auf eine ganz bestimmte Umgebung, nämlich auf die jeweilige „ideale Vollfarbe" gleichen Farbtones relationiert wird. In dieser Art bezogen ist aber schließlich jede Messung; irgendein grundsätzlicher Vorzug gegenüber der üblichen Darstellung, die sich allerdings nur mit einer Bezugsfarbe (dem Weiß) begnügt, scheint mir darin nicht zu liegen. Ebensowenig verstehe ich, warum die Einführung des Begriffes „Schwarz" statt „Dunkelheit" diese Erweiterung der Farbcharakteristik mit sich bringen soll, wie dies der Fall wäre, wenn es sich hier wirklich um die zahlenmäßige Beschreibung bezogener Farben handeln würde. Ich sehe nur, daß die Möglichkeit, verschiedene Farbtöne miteinander auf Helligkeit zu vergleichen, in den Kennzahlen nicht enthalten ist; wenn dies nun auch für die Agnoszierung einer Pigmentfarbe nicht benötigt wird, und wegen der Ausschaltung der Individualität gewisse Vorteile mit sich bringt, so ist der Verzicht darauf doch nur eine Selbstbeschränkung, keine Erweiterung.

Zusammenfassend möchte ich sagen: Die Ostwald'sche, auf der Grundgleichung

$$f + w + s = 1$$

beruhende Pigmenttheorie mag praktisch zu genügend charakteristischen Kernziffern führen; sie ist einfach, anschaulich und in erster Annäherung entsprechend. Als ein Fortschritt in der Erkenntnis kann sie dagegen nicht angesehen werden. Wegen der nur sehr mangelhaft erfüllten Voraussetzung über die Form der Remissionsfunktion, auf der sie basiert, und wegen der Widersprüche mit der Erfahrung, zu denen ihre Grundlagen führen, ist sie keineswegs geeignet, die logisch exakte Beschreibung, die die Helmholtzsche Theorie ermöglicht, zu ersetzen oder gar zu verdrängen. Sie liefert nicht mehr als eine, für viele Zwecke und für die erste Orientierung vielleicht ganz geeignete Faustregel zur Klassifizierung der Pigmente. Als solche mag sie vom Standpunkte des Praktikers aus begrüßenswert erscheinen. Vom wissenschaftlichen Standpunkte aus ist sie es nicht. Denn abgesehen von ihrer Unzulänglichkeit schafft sie unnötigerweise eine tiefe Kluft zwischen Pigmentfarben und farbigen Lichtern und ist dadurch geeignet neuerlich Verwirrung in die von Helmholtz erreichte Ordnung auf dem Gebiete der Farbe zu bringen.

Wien, aus dem II. physikalischen Institut der Universität.

(Eingegangen 22. März 1920.)

Die Polarität einer Aluminiumzelle.

Erste Mitteilung.

Von Franz Streintz.

Bei der Elektrolyse verdünnter Schwefelsäure wird an einer Anode aus Aluminium eine scheinbare galvanische Polarisation hervorgerufen, die innerhalb weiter Grenzen der elektromotorischen Kraft der polarisierenden Kette proportional ist. Da sich die Anode dabei mit einer grauen schwer zu beseitigenden Schicht bedeckt, so wurde angenommen, daß sie ein Dielektrikum darstellt. Die beobachtete hohe Polarisation würde sich demnach aus der galvanischen Polarisation im engeren Sinne und einer darüber gelagerten dielektrischen Polarisation zusammensetzen, da an der Anode ein Kondensator entsteht, dessen Dielektrikum aus der mit Säure getränkten Schicht, dessen Belegungen aus dem Metall und der Säure bestehen[1]).

In neuerer Zeit wurde in der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt von Günther

1) F. Streintz, Wied. Ann. **32**, 119, 1887; **34**, 751, 1888.

Schulze[1]) eine Reihe eingehender und wertvoller Untersuchungen über das Verhalten von Aluminium-Anoden in verschiedenen wässerigen Lösungen ausgeführt. Aus den Ergebnissen konnte gefolgert werden, daß das Dielektrikum nicht aus einer einfachen schlecht leitenden Haut besteht, sondern aus Sauerstoffgas, das sich in verschiedenen Schichten dieser Haut einlagert.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht nicht darin, die Schulzeschen Ergebnisse einer Prüfung zu unterziehen oder sie weiter zu entwickeln, es soll vielmehr nur festgestellt werden, ob an einer Aluminium-Anode ähnliche Erscheinungen auftreten, wie sie an den Grenzflächen zwischen Sulfidkristallen und ihren metallischen Zuleitungen zu beobachten waren[2]). Zwischen Metall und Kristall befindet sich von Haus aus eine gasförmige Schicht eingebettet, die die Ursache des Übergangswiderstandes ist, an Aluminium dagegen wird diese nach Schulze gleichfalls gasförmige Schicht erst durch elektrolytische Vorgänge primärer und sekundärer Natur erzeugt, die bei der Mannigfaltigkeit der möglichen Prozesse beim Umsatz des Metalles mit Sauerstoff, Hydroxyl und Schwefelsäure im Dunkeln liegen.

Im Schließungskreise einer elektromotorischen Kraft liegt also in beiden Fällen ein Gaskondensator von großer und veränderlicher Kapazität. Um zu einem Vergleich zu gelangen, waren die Vorgänge in einer Aluminiumzelle in gleicher Weise zu verfolgen, wie es bei den Untersuchungen über die unipolare Leitung an Kristallen geschehen ist. Es mag gleich vorweggenommen werden, daß die Beziehungen zu Stromstärke und Ladungspotential nicht nur ähnlich liegen, sondern vollkommen gleich sind.

Wird dieselbe Bezeichnung wie bei den Versuchen an Kristallen gewählt, so stellt i_{21} die Stromstärke dar, wenn Aluminium Kathode, i_{12} jene, wenn es Anode ist. Der echte Bruch

$$U = \frac{i_{21} - i_{12}}{i_{21}}$$

soll wieder Strompolarität heißen, während das Produkt aus dem Ladungspotential V und der Strompolarität UV Leistungspolarität genannt werden soll.

Die Zelle bestand aus einem Becherglase von 250 cm³ Fassungsraum und war mit verdünnter Schwefelsäure von 7 Gewichtsprozenten H_2SO_4 gefüllt. Zwei ebene Aluminiumbleche von 5,5 × 4 cm² Fläche und einer Dicke von 0,9 mm, die miteinander durch einen Metallbügel verbunden waren, befanden sich nahe am Rand des Bechers und schlossen ein in der Mitte der Zelle hängendes Platinblech von gleicher Oberfläche ein. Die Bleche tauchten vollständig in den Elektrolyt ein und befanden sich in Abständen von 2 cm voneinander. Ein Deckel aus einer Korkplatte schloß das Becherglas ab. Er war mit Löchern zur Aufnahme der Zuleitungsdrähte versehen. Den Strom lieferte eine Akkumulatorenbatterie von Bornhäuser. Die Stromstärken und -spannungen wurden mit Weston-Voltmetern gemessen.

Die Ergebnisse.

1. Das Gesetz der Strompolarität (Zusammenhang zwischen i_{21} und i_{12}). Die Messungen wurden bei einer Stromstärke $i_{21} = 0{,}05$ Weber begonnen und in zehn gleichen Stufen von 0,01 bis 0,15 Weber fortgesetzt. In der Richtung i_{21} stellte sich die Voltmeternadel sofort ruhig ein; in der Richtung i_{12} bedurfte es dazu etwa zehn Minuten. Bei Vertauschen der Stromrichtung war zunächst, wie an Kristallen, bei denen nur eine Grenzschicht Übergangswiderstand besaß, $i_{12} = i_{21}$. Dann trat ein langsames, bald beschleunigtes und schließlich verzögertes Sinken von i_{12} ein. Stoßweise Änderungen waren nicht wahrzunehmen, woraus geschlossen werden darf, daß innerhalb der gewählten Spannungen Durchbrüche durch die Grenzschicht nicht entstanden sind. Mit zunehmender Stromstärke fand eine Vergrößerung der Strompolarität statt in gleicher Weise wie an Kristallen, so daß auch hier dieselbe Beziehung zwischen den Stromstärken:

$$i_{12} = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b i_{21}}$$

gilt. Polarisiert wurde der Reihe nach mit 14, 28, 42 und 56 Volt.

Die Versuche wurden an drei aufeinanderfolgenden Tagen ausgeführt. Sobald eine Beobachtungsreihe abgeschlossen war, wurden die Elektroden aus der Lösung herausgehoben, mit Wasser abgespült und an der Luft getrocknet. Kurze Zeit vor jeder folgenden Beobachtungsreihe wurden die Elektroden wieder in die Säure versenkt. Die Aluminiumbleche hatten sich mit der grauen Schicht bedeckt, auch waren einige dunklere Streifen, die vom oberen Rande des Metalles mit einer leichten Krümmung nach dem unteren verliefen, aufgetreten. Diese Streifen nahmen nach jeder Versuchsreihe etwas an Breite zu, die Platten, die anfänglich Oberflächenfarben zeigten, verfärbten sich allmählich in ein tieferes Grau.

1) G. Schulze, Ann. d. Phys. (4) **21**, 929, 1906; **22**, 547, 1907; **31**, 1053, 1910; Zeitschr. f. Elektrochemie **20**, 592, 1914.

2) F. Streintz und A. Wesely, diese Zeitschr. **21**, 42 und 316, 1920; F. Streintz, ebenda **21**, 367, 1920.

V	i_{21}	i_{12} beob.	a	b	i_{12} ber.	U
14	0,0490—0,1500	0,0443—0,1011	0,1232	0,1515	0,0443—0,1012	0,096—0,326
28	0,0615—0,1500	0,0567—0,1209	0,3900	0,4120	0,0567—0,1209	0,078—0,194
42	0,0500—0,1500	0,0495—0,1360	0,8519	0,8956	0,0497—0,1360	0,0100—0,093
56	0,0500—0,1500	0,0498—0,1390	1,1190	1,1680	0,0499—0,1392	0,004—0,073

Unter den vielen Zahlen sind nur drei vorhanden, bei denen die Abweichungen der beobachteten Werte von i_{12} von jenen der nach der Gleichung berechneten knapp ein halbes Prozent betrugen. Alle übrigen lagen darunter. Das Gesetz der Strompolarität tritt somit geradezu plastisch hervor. Aus diesem Grunde kann auf eine Wiedergabe sämtlicher Zahlen verzichtet werden; es wird genügen, nur jene Werte anzuführen, die bei den geringsten und größten Stromstärken ermittelt wurden.

In der obigen Tabelle sind in der ersten Reihe die gewählten Spannungen V in Volt, in der zweiten und dritten die beiden Grenzwerte für die Stromstärken in Weber angegeben. Die Koeffizienten a und b enthält die vierte und fünfte, die berechneten Werte von i_{12} die sechste und die entsprechenden Strompolaritäten U die siebente Reihe.

Bei einer Spannung $V = 10$ Volt traten große Unregelmäßigkeiten auf. Das gesetzmäßige Verhalten konnte bei den Schwankungen, die insbesondere i_{12} zeigte, nicht nachgewiesen werden.

2. Das Gesetz der Leistungspolarität: $UV = \text{konst.}$ Bildet man die Produkte der in der Tabelle angegebenen Werte von U und V für $i_{21} = 0{,}15$ Weber, so erhält man der Reihe nach 4,56, 5,43, 3,91 und 4,09. Die für Blei- und Silberglanz gefundene Beziehung scheint also nicht zu gelten. Allein die Versuchsbedingungen waren möglichst ungünstig, da zwischen den herausgegriffenen Werten eine Zeit von einem Tage und darüber gelegen, außerdem die Zelle stundenlang bei anderen Stromstärken in Verwendung gestanden und nach jeder Versuchsreihe entleert worden war. Man hat bei Prüfung auf die Leistungspolarität der Zelle in gleicher Weise vorzugehen, wie an Kristallen, nämlich in ununterbrochener Reihe bei konstant erhaltenem i_{21} und steigendem Potential die dazu gehörigen Werte von i_{12} zu messen. Auf diesem Wege konnte das Gesetz bestätigt werden. Nur ist der ansteigende Ast von UV auf ein weitaus größeres Potentialintervall ausgedehnt, als an Kristallen; dementsprechend erreichte die Leistungspolarität erst bei viel höheren Spannungen einen konstanten Wert.

In Fig. 1 sind zwei Kurven ersichtlich. Die eine (gestrichelte) bezieht sich auf Silberglanz und gibt die in der zweiten Mitteilung über die unipolare Leitung an Kristallen erhaltene Kurve (Fig. 2) wieder[1]). Der Maßstab für V als Abszissen, UV als Ordinaten ist in der nachstehenden Fig. 1 in Klammern gesetzt. Die zweite Kurve bezieht sich auf die Aluminiumzelle. Die Werte für V und UV sind nicht eingeklammert; durch Kreise sind die beobachteten Werte erkenntlich gemacht. Die konstante Stromstärke i_{21} betrug 0,01 Weber. Von ungefähr 120 Volt aufwärts wird $UV = \text{konst.}$

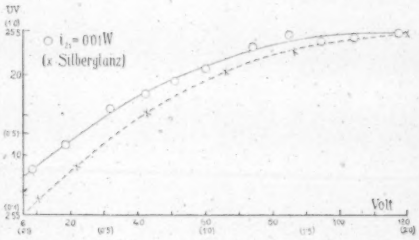


Fig. 1.

Der Anstieg ging recht regelmäßig vor sich. Er ist in dem reduzierten Maßstabe weniger steil als an Silberglanz, doch ist die Ähnlichkeit beider Kurven unverkennbar. Fig. 2 gibt Messungen an, die bei größeren Stromstärken $i_{21} = 0{,}05$ Weber (die beobachteten Werte sind schwarze Kreise) und $i_{21} = 0{,}1245$ Weber (weiße Kreise) ausgeführt wurden. Die in Klammern gesetzten Ziffern beziehen sich auf $i_{21} = 0{,}05$ Weber.

Zwischen i_{21} und der Spannung, bei der UV

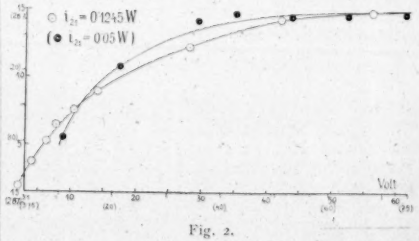


Fig. 2.

1) F. Streintz und A. Wesely, diese Zeitschr. **21**, 320, 1920.

konstant wird, scheint die Beziehung zu bestehen, daß sie mit wachsender Stromstärke geringer wird. Denn es wurde gefunden:

i_{21}	V
0,01 Weber	120 Volt
0,05 „	75 „
0,1245 „	60 „

Genaueres über diese Beziehung zu ermitteln, dürfte kaum möglich werden. Wie aus den Kreisen, die die beobachteten Werte angeben, ersichtlich wird, wird der Anstieg der Kurven, bevor sie den geradlinigen Weg einschlagen, gering. Kleine Störungen, die im System der Zelle eintreten, können sich in dieser Periode empfindlich zur Geltung bringen; die Bestimmung der Spannung, bei der gerade der Grenzwert erreicht wird, wird daher unsicher. Dazu kommt, daß in jeder Versuchsreihe die Zelle neue individuelle Eigenschaften aufweist. Die Kapazität des Kondensators unterliegt auch hier fortwährenden Wandlungen, so daß Vergleiche zwischen den aufeinanderfolgenden Reihen nicht genügend verläßlich angestellt werden können.

Dagegen ist die Aussicht günstiger, über die Bedeutung der Koeffizienten a und b, die beide von der Dimension einer Stromstärke sind, Aufschluß zu erhalten. Die Koeffizienten nehmen, wie aus der Tabelle hervorgeht, mit dem Ladungspotential zu. Wahrscheinlich ist, daß auch die Kapazität der Anode in ihnen enthalten ist. Mit einer Methode, die zu reduzierten Werten führt, wie es bei der Untersuchung an Silberglanz bereits mit Erfolg geschehen ist, werden sich Beziehungen von a und b zum Ladungspotential und zur Kapazität feststellen lassen.

Graz, 2. Physikalisches Institut der Technischen Hochschule, 28. Juni 1920.

(Eingegangen 5. Juli 1920.)

Über die elektrischen Figuren.

II. Mitteilung[1]).

Von Karl Przibram.

1. Nach der in der ersten Mitteilung dargelegten Auffassung über die Entstehung der elektrischen Figuren sind die von der Anode ausgehenden Entladungsbahnen, wenn einmal gebildet, besser leitend[2]) als die von der Kathode ausgehenden, da bei ersteren, die durch den Stoß der ins Feld hinauswandernden positiven Ionen erzeugt werden, sicher auch Ionisation durch die neugebildeten negativen Ionen, die besseren Ionisatoren, erfolgt, während bei letzteren zunächst nur die negativen Ionen ionisierend wirken. Infolgedessen zeigen die auf einzelne Linien beschränkt bleibenden positiven Bahnen, die das Feld stärker vorschieben, ein rascheres und weiter reichendes Wachstum, als die negativen, sie entstehen aber etwas später als letztere, da eine merkliche Ionisierung durch positive Ionen erst später, d. h. bei höherer Spannung einsetzt als eine solche durch negative Ionen. Beide Folgerungen: größere Ausbreitungsgeschwindigkeit und späterer Beginn der positiven Figuren hat der Verf.[1]) ohne Heranziehung der Ionentheorie aus dem Verhalten zweipoliger Figuren bei verschiedenen Elektrodendistanzen und Drucken gezogen; hier finden sie ihre ionentheoretische Begründung. Der Verf. hat wiederholt darauf hingewiesen, daß sich aus diesen Annahmen die wichtigsten polaren Unterschiede der Figuren erklären lassen und schließlich in einem Aufsatze „Form und Geschwindigkeit, ein Beitrag zur allgemeinen Morphologie“[2]) zu zeigen versucht, daß die Tatsache, daß die rascher wachsende positive Figur strahlig-verästelt, die langsamere negative weniger zerteilt und abgerundet ist, nur ein Spezialfall eines recht allgemeinen morphologischen Prinzipes ist, dem unter anderem auch die Spritz- und Abreißfiguren der Flüssigkeiten, die Skelettbildung der Kristalle und auch eine Reihe biologischer Tatsachen unterworfen sind.

Die erste Folgerung: größere Ausbreitungsgeschwindigkeit der positiven Figur hat durch P. O. Pedersen[3]) ihre Bestätigung erfahren. Es bleibt noch der Vorsprung der negativen Entladung vor der positiven nachzuweisen. Auch dies gelingt mittels der von Pedersen entwickelten Methoden[4]).

Pedersen hat zur Kontrolle seiner Messungen der Geschwindigkeiten der elektrischen Figuren folgenden Versuch zur Ermittlung des Verhältnisses der Geschwindigkeiten der positiven und negativen Figur angegeben: als Elektroden werden zwei längliche Metallstücke (A und K, Fig. 1) derart auf die photographische

1) Vgl. diese Zeitschr. **19**, 299—303, 1918.
2) Einen Beweis hierfür siehe Wiener Ber. **128**, 1203—1221, 1919.

1) Wiener Ber. **108**, 1161—1171, 1899.
2) Naturwissenschaften **8**, 103—107, 1920.
3) Danske Vidensk. Selsk. I, 11, 1919. Die Geschwindigkeit der positiven Gleitbüschel ist schon früher von M. Toepler nach ganz anderer Methode bestimmt und von derselben Größenordnung (10^7 cm/sec) gefunden worden, siehe Toepler, Ann. d. Phys. (4) **21**, 193—222, 1906.
4) Die folgenden Darlegungen sind ein Auszug einer der Wiener Akademie der Wissenschaften vorgelegten Arbeit, siehe Wiener Anzeiger vom 22. April 1920.

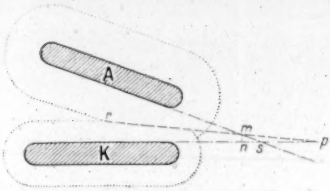


Fig. 1.

Platte gelegt, daß ihre einander zugekehrten geradlinigen Kanten einen spitzen Winkel einschließen und ihr kleinster Abstand zwar so groß ist, daß es zu keiner Funkenentladung kommt, aber noch so klein, daß die beiden Figuren sich zwischen den Elektroden nicht ungestört ausbilden können. Die gut kenntlichen Vereinigungsstellen der positiven und negativen Leuchtfäden liegen dann auf einer Geraden. Pedersen schließt, daß, da man keinen Grund habe, an dem gleichzeitigen Beginn der Entladung an beiden Elektroden zu zweifeln, die Längen der positiven Leuchtfäden zu denen der negativen sich verhalten müssen wie die Ausbreitungsgeschwindigkeiten, und erhält befriedigende Übereinstimmung mit seinen Absolutmessungen.

Wäre diese Auffassung Pedersens richtig, so müßte jenes Verhältnis der beiden Leuchtfädenlängen für jeden Punkt der Vereinigungslinie den gleichen Wert haben, mit anderen Worten: die Verlängerung dieser Vereinigungslinie rmp müßte durch den Schnittpunkt S der Verlängerungen der Elektrodenkanten gehen. Nun zeigt aber die Ausmessung der von Pedersen reproduzierten Figur sowie zahlreicher ähnlicher vom Verfasser aufgenommener Figuren, daß dem nicht so ist: die Verlängerung der Vereinigungslinie schneidet die Verlängerung der Kante der Anode A in m deutlich vor deren Schnitt mit der Kathodenkantenverlängerung, und der Abstand mn des Schnittpunktes der verlängerten Vereinigungslinie mit der verlängerten Anodenkante von der verlängerten Kathodenkante ist offenbar nichts anderes als der Weg, den die negative Entladung zurücklegt, ehe die positive beginnt[1]). Dividiert man diesen Abstand durch die von Pedersen gemessene Geschwindigkeit der negativen Figur, so erhält man den Vorsprung der negativen Figur vor der positiven. Die folgenden Zahlen wurden auf Platten von ca. 1,4 mm Dicke mit einer Primärfunkenlänge von 5 mm bei Atmosphärendruck und mit verschiedenen Winkeln zwischen den Elektroden erhalten:

Winkel in Graden	Abstand in cm	Vorsprung in 10^{-8} sec.
18^0	0,22	2,6
20	0,12	1,42
9	0,18	2,12
11	0,22	2,6
15	0,20	2,4
9	0,12	1,42

Mittel: $2{,}1 \cdot 10^{-8}$ sec.

Der Vorsprung scheint von der Spannung ziemlich unabhängig zu sein, dagegen mit wachsender Plattendicke zuzunehmen.

2. In der ersten Mitteilung war eine kleine Tabelle der Figurengrößen in verschiedenen Gasen wiedergegeben, aus der hervorzugehen schien, daß die einheitlichen Gase — Luft aber nicht — sich bezüglich des Verhältnisses der

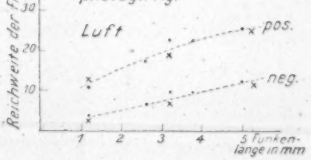


Fig. 2.

Radien der positiven zu denen der negativen Figuren im allgemeinen nach ihrer Elektronenaffinität ordnen. Pedersen hat nun (allerdings als vorläufig bezeichnete) Messungen der Figurengrößen mitgeteilt, die eine andere Reihenfolge ergeben würden, nämlich für abnehmendes Verhältnis $\overset{+}{R}/\overset{-}{R}$: Sauerstoff, Wasserstoff, Luft und Stickstoff, Kohlendioxyd.

Da nun die photographischen Aufnahmen

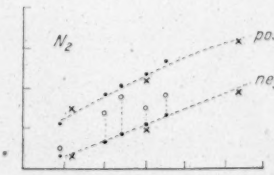


Fig. 3.

1) Fig. 1 gibt nur eine schematische Veranschaulichung; eine genaue den Messungsergebnissen entsprechende Zeichnung wird in der Akademiearbeit mitgeteilt.

namentlich in Sauerstoff, aber auch in Wasserstoff und Kohlendioxyd recht undeutlich, die Messungen daher unsicher sind, hat der Verfasser zur Methode der Staubfiguren (auf schwarzem Siegellack) zurückgegriffen, die einen Zweifel über die Grenze einer Figur selten aufkommen läßt, und bei 740 mm Hg-Druck die Zahlen der folgenden Tabelle erhalten, die Mittelwerte aus mehreren Aufnahmen, bei denen stets vier Durchmesser gemessen wurden, darstellen. Die benützte Kapazität betrug etwa 30000 cm beiderseits, die Länge der Zuleitung, von der nach Pedersen die Figurengröße auch abhängt, 130 cm beiderseits.

In Stickstoff und Luft, wo die photographische Methode deutliche Bilder liefert, wurden auch einige photographische Figuren aufgenommen. Die früheren Messungen des Verfassers in diesen Gasen fügen sich bei Umrechnung auf große Kapazität hinreichend in die neuen ein. Die Übereinstimmung für Luft mit den von M. Toepler erhaltenen Zahlen ist eine befriedigende. Es ergibt sich in Übereinstimmung mit den früheren Angaben des

Gas	Plattendicke	Primär-Funkenlänge in mm	Spannung[1] Kilovolt	Staubfiguren: Reichweite[2] der + Fig. mm	Staubfiguren: Reichweite[2] der − Fig. mm	Staubfiguren: Quotient $+/-$ R/R	Photographische[3] Figuren: Reichweite[2] der + Fig. mm	Photographische[3] Figuren: Reichweite[2] der − Fig. mm	Photographische[3] Figuren: Quotient $+/-$ R/R
Luft	2 mm	1,2	3,5	10,5	3,9	2,69	12,5	2,0	6,25
		2,0	8	17,0	6,1	2,79	—	—	—
		3,2	10,5	22,4	9,7	2,31	18,6	6,4	2,90
		3,8	12,5	22,3	9,3	2,31	—	—	—
		5	17,5	25,3	12,4	2,04	25,6[4]	13,3[4]	1,92
		5	—	—	—	—	23[5]	13[5]	1,77
		5,3	18,5	—	—	—	24,9	11,5	2,16
	6 mm	2,0	8	15,2	5,0	3,04			
		3,0	10	16,7	6,3	2,65			
		4,0	13	17,9	7,0	2,56			
Stickstoff[6]	2 mm	0,9	2,8	11,2	3,0	3,73			
		1,2	3,5	—	—	—	15,0	3,0	5,0
		2,0	6	18,5	6,4	2,89			
		2,4	7,5	20,5	8,4	2,44			
		3,0	10	23,5	10,9	2,15	22,1	9,8	2,25
		3,5	11,5	27,0	13,8	1,96			
		5	17,5	—	—	—	23[5]	13[5]	1,77
		5,3	18,5	—	—	—	32,1	19,0	1,69
	6 mm	3,0	10	22,1	9,8	2,25			
Wasserstoff[6]	2 mm	1	3,0	14,7	8,7	1,69			
		2	6	24,3	17,1	1,42			
		3	10	38,4	20,7	1,85			
		3,8	12,5	42,2	24,4	1,73			
		5	17,5	—	—	—	28[5]	13,5[5]	2,07
Sauerstoff[6]	2 mm	1,2	3,5	6,1	3,3	1,85			
		2,2	7	11,0	5,4	2,04			
		3,6	12	13,1	8,4	1,56			
		5	17,5	17,7	10,8	1,64	20[5]	8,5[5]	2,35
Kohlendioxyd[6]	2 mm	0,9	2,8	4,2	4,0	1,05			
		1,1	3,2	4,8	5,0	0,96			
		1,8	5,5	8,3	7,0	1,19			
		2,0	6	7,3	8,1	0,90			
		3,0	10	8,5	10,6	0,80			
		3,3	11	9,7	11,9	0,81			
		4,7	16	12,6	16,1	0,78			
		5	17,5	—	—	—	11[5]	10[5]	1,10
Chlor[7]	6 mm	2,6	8	6,2	4,8	1,29			
		4,0	13	7,7	6,6	1,16			
		5,7	20	10,1	7,1	1,42			

1) Die der Primärfunkenstrecke entsprechende wirksame Spannung wurde wieder durch ein an Stelle des Aufnahmeapparates eingeschaltetes Funkenmikrometer bestimmt. Bei der jetzigen Anordnung stimmen die Angaben dieses Mikrometers für die längeren Funken mit der Primärfunkenstrecke überein, für die kleineren Werte sind sie aber stets niedriger.

2) Die Reichweiten in Millimetern, erhalten durch Messung der Durchmesser der Figuren, Subtraktion des Elektrodenradius von 1 mm und Division durch 2.

3) Plattendicke zirka 1,4 mm.

4) Mittelwerte von M. Toepler (Ann. d. Phys. **53**, 217—234, 1917), für Dicken von 1 bis 1,65 mm.

5) Werte von P. O. Pedersen, l. c.

6) Käufliche Bombengase.

7) Aus Braunstein und Salzsäure.

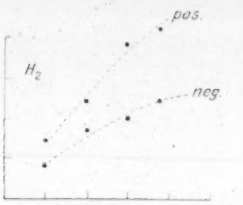


Fig. 4.

Verfassers, daß in Stickstoff beide Figuren größer sind als in Luft, daß das Verhältnis $\overset{+}{R}/\overset{-}{R}$ in ersterem aber kleiner ist als in letzterer, während dieses Verhältnis in Sauerstoff wesentlich kleiner als in Stickstoff bei gleicher Spannung ist. Unsicher ist die Stellung des Wasserstoffs; während er für größere Spannungen ein größeres Verhältnis $\overset{+}{R}/\overset{-}{R}$ ergibt als Sauerstoff, was seiner geringeren Elektronenaffinität entspräche, gibt er für kleinere Spannungen kleinere Werte. Bemerkenswert ist, daß in Stickstoff sich auch jenseits der recht scharfen Grenze der negativen Staubfigur, die, wie die Zahlen und die Kurven zeigen, recht gut mit der Grenze der photographischen Figur, also auch der leuchtenden Entladung übereinstimmt, stets ein leichterer roter Staubanflug findet, dessen Grenze in Fig. 3 mit einem ◯ bezeichnet ist und der fast die ganze sogenannte „staubfreie Zone" ausfüllt, ein Zeichen, daß hier die Ladung weiter fortgeschritten ist, als die leuchtende Entladung reicht. Man vergleiche hiermit das stark negative Verhalten des Stickstoffes bei der oszillierenden Spitzenentladung (Himstedteffekt)[1].

Fig. 5.

Chlor gibt wieder kleine Werte des Verhältnisses $\overset{+}{R}/\overset{-}{R}$, während es für CO_2 sogar kleiner als eins wird, wie bereits Reitlinger[2] gefunden hatte. Nimmt man noch die allerdings unter etwas anderen Bedingungen gewonnenen Resultate des Verfassers für Helium und Argon hinzu, so scheint sich im großen und ganzen doch ein Zusammenhang zwischen dem Verhältnis der Figurengrößen und der Elektronenaffinität zu ergeben.

Fig. 6.

Deutlicher tritt aber die Beziehung der polaren Unterschiede zur Elektronenaffinität in der Form der Figuren zutage, wie in der ersten Mitteilung gezeigt worden ist: Die starke Verästelung der positiven Figur in Stickstoff, die großen, wenig zerteilten negativen Figuren 1. Art in diesem Gase bei Spannungen, bei denen in Luft schon längst negative Gleitbüschel hervorschießen, die Ähnlichkeit der beiden Figuren 2. Art in Sauerstoff und die noch größere in Chlor[1]). Die Arbeit Pedersens

Fig. 7.

1) Man vergleiche auch die Tatsache, daß das Verhältnis der Figurengrößen $\overset{+}{R}/\overset{-}{R}$ in Luft größer ist als in N_2 und O_2 mit dem Verhalten der Luft beim Himstedteffekt, der in ihr stärker positiv ist als in O_2 und N_2.

2) Wien. Ber. **43**, 531—544, 1861. In einer vorläufigen Notiz (Wien. Ber. **43**, 25—26, 1861) gibt Reitlinger an, daß sich die Staubfiguren in bezug auf die polaren Unterschiede in Luft, H_2, O_2 und CO_2 so verhalten wie die Büschel in diesen Gasen nach Faraday. Dies würde etwa die obige Reihenfolge der Abnahme von $\overset{+}{R}/\overset{-}{R}$ geben. Eine ausführlichere Mitteilung Reitlingers über seine Messungen konnte der Verf. in der Literatur nicht finden.

Der von Reitlinger angegebene Zusammenhang zwischen Figurengröße und Schlagweite in verschiedenen Gasen bestätigt sich insofern, als Helium, Argon und Wasserstoff die größten, Chlor die kleinsten Werte liefert und die anderen Gase eine mittlere Stellung einnehmen. Für diese mittleren Glieder scheint aber eine einfache Beziehung zur Schlagweite — man vgl. die Heydweilliersche Zusammenstellung in den Tabellen von Landolt-Börnstein — nicht ohne weiteres behauptet werden zu können.

1) Die in einer Anmerkung der ersten Mitteilung angegebene Verschwommenheit der Begrenzung der positiven Figur in O_2 scheint nur auf der starken Abnahme des photographischen Eindruckes nach außenzu zu beruhen; die positive Staubfigur endet auch in O_2 scharf, doch sind die Äste stumpfer und weniger verzweigt als in Luft. In Cl_2 sind beide Staubfiguren einheitliche runde Flecken, während die photographischen Aufnahmen deutlich in beiden Figuren Zerfaserung zeigen; bei der Bestäubungsmethode gehen eben manche Details verloren.

enthält nun neue Belege hierfür: Die Endverästelung der positiven Figuren in Stickstoff wird durch Sauerstoffzusatz zurückgedrängt, ein Argon-Luftgemisch zeigt ähnliche positive Endverästelungen wie Stickstoff, die vom Verfasser gefundene stärkere Zerfaserung der negativen Figur in CO_2 äußert sich bei Pedersen, allerdings viel weniger auffallend, in der etwas größeren Breite der dunklen Linien und deren Krümmung, auch die negativen Figuren in Sauerstoff zeigen Unregelmäßigkeiten und noch größere Breite der dunklen Linien.

Der Verfasser möchte auf Grund neuerer Versuche hier noch anführen, daß die positiven Äste bei Aufnahmen in Luft auf angefeuchteten photographischen Platten, bei denen also die Entladung in einer mit Wasserdampf gesättigten Schicht verläuft, merkwürdig glattrandig und wenig verzweigt sind, worin man ein Analogon zur Zurückdrängung der Endverästelung in N_2 durch O_2 erblicken kann, doch spielt hier sicher auch die erhöhte Oberflächenleitfähigkeit mit.

Es mag auffallen, daß die Elektronenaffinität bei den Figuren eine Rolle spielen soll, obwohl nach den Untersuchungen Townsends im Gebiete des Ionenstoßes die Elektronen anscheinend auch in stark elektronegativen Gasen frei bleiben. Hierzu ist jedoch zu bemerken, daß erstens die hier in Betracht kommenden Untersuchungen über Ionenstoß durchweg bei Drucken von wenigen Millimetern Hg und darunter angestellt worden sind, der Schluß auf Atmosphärendruck also eine beträchtliche Extrapolation bedeutet, und überdies, wie Lenard neuerdings in seiner Abhandlung „Quantitatives über Kathodenstrahlen" dargelegt hat, diesen Versuchen manche Unklarkeit anhaftet, und daß zweitens für die Ausbreitung der Figuren nicht nur der Ionenstoß, sondern, wie der Verfasser wiederholt auseinandergesetzt hat, auch die Art der nicht leuchtenden Ionenabwanderung am Rande des Entladungsgebietes maßgebend ist, bei der die Geschwindigkeit der Molisierung doch wohl sicher von der Elektronenaffinität des Gases abhängen wird[1]).

1) Sucht man nach anderen Eigenschaften des Mediums, von denen die polaren Unterschiede der Figuren bzw. der sie erzeugenden Entladung abhängen, so findet man noch am ehesten die elektrische Festigkeit; im allgemeinen nehmen die polaren Unterschiede zu mit abnehmender Festigkeit, wobei nicht gesagt ist, ob die Abhängigkeit eine unmittelbare oder wieder durch die Elektronenaffinität, mit der im allgemeinen die elektrische Festigkeit wächst, vermittelte ist. Daß kein ganz eindeutiger Zusammenhang zwischen polaren Unterschieden und elektrischer Festigkeit besteht, geht aus dem Ähnlicherwerden der Figuren bei abnehmendem Luftdruck (abnehmender Festigkeit) hervor. Möglicherweise besteht für die polaren Unterschiede ein Optimum der elektrischen Festigkeit, das so zu deuten wäre: bei großer Festigkeit beginnend macht sich eine Verminderung derselben erst bei der negativen Figur bemerkbar, die bei schwer erfolgender Entladung zunächst auch aus relativ wenig Zweigen besteht und sich erst allmählich der Scheibenform nähert — die polaren Unterschiede wachsen. Ist die negative Figur zu einer homogenen Kreisscheibe geworden, so ändert sie sich bei weiterer Erleichterung der Entladung nicht wesentlich, während jetzt, wie bei tiefen Drucken zu beobachten ist, sich auch die positive Figur der Scheibenform nähert, die polaren Unterschiede können wieder abnehmen. Es wäre nicht ausgeschlossen, daß etwas Derartiges bei ganz reinen Edelgasen, insbesondere in Neon, zu beobachten wäre.

Wien, 21. Mai 1920.

(Eingegangen 15. Juni 1920.)

Zusammenfassung.

1. Es wird mittels einer von P. O. Pedersen angegebenen Versuchsanordnung nachgewiesen, daß bei der Erzeugung der elektrischen Figuren die negative Entladung vor der positiven einen Vorsprung hat.

2. Es wird die Größe der Lichtenbergschen Staubfiguren in Luft, N_2, H_2, O_2, CO_2 und Cl_2 bestimmt.

Der Liouvillesche Satz und die Relativitätstheorie.

Von Erich Kretschmann.

Die Definition der Entropie S eines physikalischen Systems durch die Wahrscheinlichkeit W seines Zustandes

$$S = k \ln W$$

gründet sich auf die Gültigkeit des Liouvilleschen Satzes[1]). Es ist daher eine wichtige Frage, ob dieser Satz auch noch in der Mechanik der Relativitätstheorie gilt, wo an Stelle der momentan wirkenden Kräfte nur Kräfte auftreten können, die sich mit Lichtgeschwindigkeit durch den Raum verbreiten.

Die Frage ist meines Wissens noch nicht untersucht, obwohl bereits im Jahre 1911 F. Jüttner[2]) aus der obenstehenden Beziehung die Thermodynamik eines idealen Gases in einer der Relativitätstheorie entsprechenden Form entwickelt hat.

Die folgende kurze Rechnung zeigt, daß für eine große Klasse von Kraftgesetzen der Relativitätstheorie eindeutige Abweichungen vom Liouvilleschen Satze bestehen.

Die von einem im Weltpunkte x_0, y_0, z_0, t_0 befindlichen Massenpunkte einem zweiten

1) Vgl. z. B. den Bericht von P. u. T. Ehrenfest in. Enz. d. math. Wiss. IV, 32, S. 27 ff.

2) F. Jüttner, Ann. d. Phys. **34**, 856, 1911.

Massenpunkte im Weltpunkte x, y, z, t, mitgeteilte Ruhbeschleunigung sei vektoriell gegeben durch

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \tau} = \mathfrak{R} \cdot \varphi\,[(\mathfrak{R}, \mathfrak{B})] + \frac{\mathfrak{B}}{c^2} \cdot (\mathfrak{R}\mathfrak{B}) \cdot \varphi\,[(\mathfrak{R}, \mathfrak{B})]. \quad (1)$$

Hier ist $\mathfrak{B}$ der Bewegungsvektor des zweiten Punktes mit den Komponenten

$$\xi = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1-q^2}} \quad \eta = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1-q^2}}$$
$$\zeta = \frac{\dot{z}}{\sqrt{1-q^2}} \quad \mathfrak{u} = \frac{i \cdot c}{\sqrt{1-q^2}} \quad (2)$$

($\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ = Geschwindigkeitskomponenten $q^2 = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)/c^2$), τ: die Eigenzeit, $\mathfrak{R}$: der Radiusvektor mit den Komponenten

$$\mathfrak{R}_x = (x - x_0),\ \mathfrak{R}_y = (y - y_0),\ \mathfrak{R}_z = (z - z_0)$$
$$\mathfrak{R}_t = ic\,(t - t_0)$$

$(\mathfrak{R}, \mathfrak{B})$: das skalare Produkt

$$\mathfrak{R}_x \cdot \xi + \mathfrak{R}_y \cdot \eta + \mathfrak{R}_z \cdot \zeta + \mathfrak{R}_t \cdot \mathfrak{u}$$

und φ eine beliebige Funktion ihres Arguments $(\mathfrak{R}, \mathfrak{B})$.

Man findet leicht:

$$(\mathfrak{R}, \mathfrak{B}) = \frac{-c \cdot r + (\mathfrak{r}, \mathfrak{v})}{\sqrt{1-q^2}}, \quad (3)$$

wenn $\mathfrak{r}$ den gewöhnlichen von x_0, y_0, z_0 nach x, y, z gezogenen Radiusvektor vom Betrage r und $(\mathfrak{r}, \mathfrak{v})$ das skalare Produkt von $\mathfrak{r}$ und der Geschwindigkeit, $\mathfrak{v}$, der beschleunigten Masse bezeichnet.

Wenn $\mathfrak{v}$ klein gegen c ist, was angenommen werde, so ist nahezu $(\mathfrak{R}, \mathfrak{B}) = -c \cdot r$ und die Funktion φ, die auch noch von den Ruhmassen abhängen darf, bestimmt die Abhängigkeit der wirkenden Kraft von der Entfernung. Das zweite — verhältnismäßig kleine — Glied der rechten Seite von (1) ist hinzugefügt, damit der ganze Vektor ebenso wie links $\partial \mathfrak{B}/\partial \tau$ orthogonal zum Bewegungsvektor $\mathfrak{B}$ wird, was sich durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{B}$ leicht nachweisen läßt ($\mathfrak{B}^2 = -c^2$).

Als Zustandsveränderliche wählen wir mit Jüttner

$$x,\ y,\ z,\quad \xi,\ \eta,\ \zeta \quad (4)$$

und unterscheiden die einzelnen, n, Massenpunkte, die das betrachtete System, z. B. ein ideales Gas, bilden mögen, durch angehängte Indizes.

Dann wäre der Liouvillesche Satz erfüllt, wenn das von einer Systemschar im $6n$ dimensionalen Phasenraum erfüllte Gebiet

$$\int \prod_1^n H_h\, dx_h\, dy_h\, dz_h\, d\xi_h\, d\eta_h\, d\zeta_h$$

stets konstant bliebe oder die zugehörige verallgemeinerte Divergenz

$$\sum_1^n h \left(\frac{\partial \dot{x}_h}{\partial x_h} + \frac{\partial \dot{y}_h}{\partial y_h} + \frac{\partial \dot{z}_h}{\partial z_h} + \frac{\partial \dot{\xi}_h}{\partial \xi_h} + \frac{\partial \dot{\eta}_h}{\partial \eta_h} + \frac{\partial \dot{\zeta}_h}{\partial \zeta_h} \right) \quad (5)$$

identisch verschwände.

Nun lassen sich allerdings nach Planck[1]), worauf Jüttner[2]) hinweist, aus den Bewegungsgleichungen

$$\frac{d(m\xi)}{dt} = X \text{ usw.}$$

eines freien Massenpunktes die Hamiltonschen kanonischen Gleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial (m\xi)} = \dot{x},$$
$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{d}{dt}(m \cdot \xi) \text{ usw. mit } H = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} + U$$

ableiten, aus denen dann (5) — bei konstanten Ruhmassen m — sofort folgt; aber das gilt, wie leicht nachzurechnen, nur, wenn sich die Kraftkomponenten X, Y, Z aus einem von der Geschwindigkeit $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ unabhängigen Potential U ableiten lassen: $X = -\frac{\partial U}{\partial x}$ usw. Diese Annahme ist jedoch in der Relativitätstheorie unzulässig. Denn X, Y, Z hängen schon wegen der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der Kraft notwendigerweise von der Geschwindigkeit $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ ab und sind auch nicht Komponenten eines Vierervektors, wie sie es bei der Ableitung aus einem Skalar U sein müßte.

Trotzdem könnte an sich der Liouvillesche Satz gelten. Um diese Frage für das angenommene Kraftgesetz (1) zu untersuchen, bilden wir nach (1) das dem beschleunigten Massenpunkt entsprechende Glied der Summe (5). Zunächst ist

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \left\{ \mathfrak{R} + \frac{\mathfrak{B}}{c^2} \cdot (\mathfrak{R}, \mathfrak{B}) \right\} \cdot \frac{\varphi\,[(\mathfrak{R}, \mathfrak{B})]}{\sqrt{1 + (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)/c^2}}$$

da

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-q^2}} = \sqrt{1 + (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)/c^2} \quad (6)$$

nach (2) ist. Die Zerlegung in Komponenten gibt:

$$\dot{\xi} = \varphi\,[(\mathfrak{R}, \mathfrak{B})] \cdot \left\{ (x - x_0) + \frac{\xi \cdot (\mathfrak{R}, \mathfrak{B})}{c^2} \right\} \cdot$$
$$\cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)/c^2}} \text{ usw.}$$

Folglich, wenn φ' die Ableitung der Funktion φ nach ihrem Argument bezeichnet:

1) M. Planck, Verh. d. D. Phys. Ges. **8**, 136—141, 1906.
2) F. Jüttner, Ann. d. Phys. **34**, 856, 1911.

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \xi} = \varphi' \cdot \Big\{ (x - x_0)^2 + (x - x_0) \cdot \frac{\xi}{c^2} \cdot (\mathfrak{R}, \mathfrak{V}) \Big\} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{1 - q^2} + \varphi \cdot \Big\{ \Big[\frac{(\mathfrak{R}, \mathfrak{V})}{c^2} + \frac{(x - x_0) \cdot \xi}{c^2} \Big] \sqrt{1 - q^2} -$$

$$- \frac{\xi}{c^2} \Big[(x - x_0) + \frac{\xi \cdot (\mathfrak{R}\mathfrak{V})}{c^2} \Big] (1 - q^2)^{-1/2} \Big\}$$

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \xi} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial \eta} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial \zeta} = \varphi' \cdot$$

$$\Big\{ r^2 \sqrt{1 - q^2} + \frac{r, v}{c^2} \cdot (\mathfrak{R}, \mathfrak{V}) + \varphi \cdot \Big\{ \frac{3 (\mathfrak{R}, \mathfrak{V})}{c^2} \sqrt{1 - q^2}$$

$$+ \frac{(r, v)}{c^2} - \frac{(r, v)}{c^2} (1 - q^2) - \frac{v^2}{c^4} \cdot (\mathfrak{R}, \mathfrak{V}) \cdot \sqrt{1 - q^2} \Big\}$$

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \xi} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial \eta} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial \zeta} = \varphi' \cdot \frac{r^2 (1 - q^2) - r(r, q) + (r, q)^2}{\sqrt{1 - q^2}} +$$

$$+ \frac{\varphi}{(\mathfrak{R}, \mathfrak{V})} \cdot \frac{3 r^2 - r(r, q) (6 - q^2) - r^2 \cdot q^2 + 3 (r, q)^2}{\sqrt{1 - q^2}}. \qquad (7)$$

Die andern drei Glieder, $\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z}$, verschwinden, da nach (2) $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ Funktionen von ξ, η und ζ allein sind. Mit Vernachlässigung von q gegen 1 oder v gegen c wird daher nach (7)

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{x}}{\partial \xi} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial \eta} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial \zeta} = \varphi' \cdot r^2 +$$

$$+ \frac{3 \varphi}{(\mathfrak{R}, \mathfrak{V})} \cdot r^2 = r^2 \Big\{ \varphi' + \frac{3 \varphi}{(\mathfrak{R}, \mathfrak{V})} \Big\}. \qquad (8)$$

Daß der links stehende Ausdruck nicht identisch verschwinden würde, wie aus (7) ersichtlich, war wohl von vornherein zu erwarten. Überraschend ist aber die einfache Art, in der er nach (8) in erster Annäherung von der Funktion φ abhängt. Er verschwindet nur, wenn

$$\varphi' = - \frac{3 \varphi}{(\mathfrak{R}, \mathfrak{V})}$$

ist, d. h. wenn

$$\varphi = \frac{\text{Konst.}}{(\mathfrak{R}, \mathfrak{V})^3}$$

ist.

Da annähernd nach (1)

$$1\,a) \qquad \frac{dv}{dt} = r \cdot \varphi$$

und nach (3)

$$3\,a) \qquad (\mathfrak{R}, \mathfrak{V}) = - c \cdot r$$

ist, so bedeutet das eine dem Entfernungsquadrat umgekehrt proportionale Kraft, die ebensogut anziehend wie abstoßend sein kann. Allgemein ist nach (1a), da r nach dem beschleunigten Punkte (x, y, z) hin gerichtet ist, die Kraft eine anziehende, wenn φ negativ ist und eine abstoßende, wenn φ positiv ist. Außerdem kommt es nach (8) nur darauf an, wie schnell φ mit der Entfernung zu- oder abnimmt. Setzen wir daher der Einfachheit halber

$$\varphi = \frac{a}{r^{n+1}}, \qquad (9)$$

so daß die Kraft nach (1a) wie die $n$te Potenz von $1/r$ abnimmt oder — für $n < 0$ — zunimmt, so ist nach (8) und (3a) annähernd:

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{x}}{\partial \xi} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial \eta} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial \zeta} = \frac{a}{c \cdot r^n} \cdot (n - 2).$$

Nehmen wir das gleiche Kraftgesetz für alle in Wechselwirkung begriffenen Massenpunkte unseres Systems als gültig an, so hat die Summe (5) notwendig dasselbe Vorzeichen wie der Ausdruck (10). Je nachdem dieser Ausdruck daher positiv oder negativ ist, nimmt das von den Bildpunkten einer Systemschar im Phasenraum eingenommene Zustandsgebiet zu oder ab. Das erste — Zunahme — tritt nach (10) notwendig ein bei abstoßenden Kräften $a > 0$, die für alle r schneller als $1/r^2$ mit der Entfernung abnehmen $n > 2$, und bei anziehenden Kräften $a > 0$, die durchweg langsamer als $1/r^2$ abnehmen, $n < 2$, oder mit r zugleich zunehmen. Abnahme des Zustandsgebiets findet genau unter den entgegengesetzten Bedingungen statt.

Alle diese Abweichungen vom Liouvilleschen Satze sind ihrem Vorzeichen nach von den Werten der Zustandsvariablen unabhängig. Es ist daher wohl aussichtslos, diesen Satz in auch nur einem der genannten Fälle durch Einführung anderer Veränderlicher an Stelle der x, y, z, ξ, η, ζ erfüllen zu wollen[1]).

Damit ist aber auch der auf den Liouvilleschen Satz gegründeten allgemeinen Entropiedefinition

$$S = k \cdot \ln W$$

der Boden entzogen.

Vielleicht gelingt es, die „Wahrscheinlichkeit" eines Zustands in einer vom Liouvilleschen Satz unabhängigen Weise zu definieren. Indessen scheint mir der eigentliche Grund für die Ungültigkeit des Liouvilleschen Satzes in der Relativitätstheorie gerade darin zu liegen, daß bei Kraftwirkungen, die sich mit endlicher Geschwindigkeit ausbreiten, im Gegensatz zur alten Mechanik im allgemeinen schon jeder einzelne der Elementarvorgänge — Zusammenstoß zweier Massenpunkte —, welche die Zustandsänderung des ganzen Systems bewirken,

1) Die Unmöglichkeit wäre streng bewiesen, wenn sich zeigen ließe, daß ein Zustandsgebiet in einen echten Teil seiner selbst überginge oder aus einem solchen entstände.

an sich irreversibel ist, so daß die mit der Zustandsänderung verbundene Entropievermehrung höchstens zum Teil eine Wahrscheinlichkeit darstellt, mindestens zum Teil aber eine Notwendigkeit. Dem entspricht es, daß zugleich mit dem Liouvilleschen Satze auch der bekannte Zermelosche Wiederkehreinwand gegen Boltzmanns mechanische Deutung der Irreversibilität fällt.

Dieser Einwand wird in der Relativitätstheorie allerdings schon aus einem anderen Grunde hinfällig, der hier zum Schlusse erwähnt werden muß. Streng genommen nämlich ist die Kraftwirkung zwischen irgend zwei Massenpunkten bei endlicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit durch ihre augenblickliche Lage, Geschwindigkeit usw. nicht vollständig bestimmt, sondern hängt von ihrer vergangenen Bewegung ab. Es wird daher unmöglich, eine endliche Zahl von Zustandsveränderlichen für ein System so zu wählen, daß durch ihre augenblicklichen Werte auch alle zukünftigen bestimmt sind.

Wie unter diesen Umständen die Entropie eines Systems in der Mechanik der Relativitätstheorie zu deuten ist, muß vorläufig dahingestellt bleiben.

Nachtrag. Nachträglich bemerke ich, daß in (7) und der vorhergehenden Gleichung rechts die Glieder fehlen, die durch Differentiation von $u = \sqrt{-c^2 - \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2}$ nach ξ, η und ζ entstehen. Es sind dies die Glieder:

$$-\varphi \cdot \frac{r}{c} \cdot q^2 - \varphi' \cdot r^2 \left| \frac{(rq)}{r} \sqrt{1 - q^2} + \frac{q^2 (\Re \mathfrak{B})}{rc} \right|,$$

die aber, wie leicht zu sehen, wegen $q \ll c$ das Endergebnis (8) nicht ändern.

Königsberg i. Pr., Februar 1920.

(Eingegangen 20. Mai 1920).

Der starre Körper.

Von Hugo Dingler.

I.

Es ist eine merkwürdige Erscheinung, daß dieser wichtigste Grundbegriff der experimentellen und theoretischen Physik und der exakten Naturforschung überhaupt, eine vergleichsweise so spärliche Behandlung bisher gefunden hat[1]). Sie erklärt sich wohl dadurch, daß das, was dem schnell darüber Hingehenden als eine kaum behandelnswerte Selbstverständlichkeit erscheint, sich dem Tieferblickenden als ein Problem von sehr großer Komplikation enthüllt.

Wie sehr wir noch in der „naiven" Periode der Wissenschaft stecken, ergibt sich aus der Tatsache, daß das Problem des starren Körpers eigentlich nur in folgender, bisher unerledigten Frage besteht: Wie wird der starre Körper tatsächlich hergestellt, welches ist die dabei wirklich befolgte Definition? Schon ein erstes Nachdenken zeigt, daß es recht schwierig ist, sich über die Frage Rechenschaft zu geben. Die allgemein darüber verbreitete Meinung ist die, daß der starre Körper rein experimentell gefunden und herausgearbeitet werde. Diese Meinung scheint nie kritisch wirklich nachgeprüft worden zu sein und kommt der heute herrschenden empiristisch gerichteten Grundanschauung über das Wesen der Physik entgegen, sie ist, andererseits wohl auch mit eine Hauptstütze dieser Grundanschauung.

Im Gegensatz hierzu habe ich 1911 auf Grund meiner Untersuchungen[1]) die Ansicht vertreten, daß der starre Körper durch die Gesetze der euklidischen Geometrie definiert und herstellbar sei, indem man Körper sucht, die möglichst genau diesen Gesetzen entsprechen (Exhaustionstheorie). Es soll nun hier die Herstellung des starren Körpers, wie sie wirklich geübt wird, einmal einer genauen kritischen Überlegung unterworfen werden, um von hier aus einen Fingerzeig zur Entscheidung zwischen den beiden einander entgegengesetzten Ansichten zu erhalten.

Die experimentalistische (empiristische) Ansicht kann in zwei Formen auftreten: a) Man kann sagen: ich nehme irgendeinen bestimmten Körper, der mir geeignet erscheint, als starr an, und definiere diesen als den (absoluten) starren Körper. Die Unzuträglichkeiten und Unmöglichkeiten dieser kaum mehr vertretenen (auch nicht rein empiristischen) Anschauung liegen so auf der Hand, daß wir sie nicht weiter behandeln; b) Man kann andererseits des Glaubens leben, daß man den starren Körper sozusagen freihändig experimentell aus der Wirklichkeit herausarbeiten könne, indem wir uns einfach der Natur als Führerin überlassen. Dies setzt voraus, daß der starre Körper irgendwie rein in der Natur schon eindeutig festgelegt sei, daß ihm eine sozusagen immanente Existenz zukomme, die nur empirisch festgestellt zu werden brauche.

1) Fast nur C. Runge (Enzykl. d. Math. V, 1) hat den empir. st. K. behandelt.

1) Die Grundlagen der angewandten Geometrie. Eine Untersuchung über den Zusammenhang zwischen Theorie und Erfahrung in den exakten Wissenschaften. Leipzig 1911.

Diese (gänzlich metaphysische) Ansicht ist die heute unter den exakten Naturforschern meist verbreitete. Sie wird im folgenden einfach als die empiristische Anschauung bezeichnet.

Ihr gegenüber tritt die Exhaustionstheorie, die gar nichts Metaphysisches mehr an sich hat. Nach ihr hat der starre Körper keine immanente, metaphysische Existenz, sondern ist einfach das erste Produkt unseres Ordnungswillens, der uns treibt, in die unabsehbare Mannigfaltigkeit der Erscheinungen und Vorgänge auf einfachste Weise Ordnung zu bringen. Es werden dabei der Natur gar keine Vorschriften gemacht, sondern lediglich ihre Erscheinungen nach einem einfachsten logischen Schema auseinandergelegt, und der starre Körper ist sozusagen der experimentell herausgearbeitete „Nullpunkt" dieses Schemas, indem er sich genau nach den Gesetzen der einfachsten, euklidischen Geometrie verhält. Alles, was sich dann nicht nach diesen verhält, sind dann Wirkungen die den starren Körper verändern.

Die herrschende empiristische Ansicht beruht lediglich auf einem „Gefühl", denn es hat sich bisher noch niemand die Mühe gemacht, die Sache bis ans Ende durchzudenken. Daher wären auch diejenigen, welche nicht der empiristischen Anschauung huldigen (wie viele Philosophen), trotzdem bisher kaum in der Lage, ernsthaften Vorhaltungen eines Physikers über die Art der Herstellung des starren Körpers völlig widerlegende Argumente entgegenzusetzen. Da, wenn der starre Körper auf irgendeine Weise gegeben ist, auch die „Geometrie unseres Raumes" gegeben ist, so übertragen sich die obigen sowie die folgenden Bemerkungen auch auf dieses Problem.

Dies nämlich ist sicher: Ist eine rein experimentelle Herstellung des starren Körpers unmöglich, so kann auch in der wirklichen Herstellung desselben in der technischen Industrie eine solche nicht vorliegen. Eine kritische Durchdenkung dieses technischen Vorgangs müßte in diesem Falle dies erkennen lassen. Zeigt sich dann, daß der Vorgang nicht rein experimentell ist, so ist damit natürlich noch nicht die absolute Unmöglichkeit einer solchen Herstellung nachgewiesen, aber der allgemein verbreiteten Ansicht, daß er so hergestellt werde, ist der Boden entzogen, und dies hat bedeutende Konsequenzen.

II.

Zwei Umstände erschweren das Problem und haben wohl die Lösung verhindert: a) daß etwa vier verschiedene Prinzipien bei der Herausarbeitung des starren Körpers nach und nach zusammenwirken, b) daß der ganze Prozeß niemals in den Händen eines einzelnen Menschen liegt.

Wir unterscheiden zunächst einmal zwischen dem starren Körper des Alltags, dem groben starren Körper, und dem starren Körper der Wissenschaft, dem feinen starren Körper. Für den groben starren Körper[1]) haben wir vorerst zwei Arten von Definitionen oder Kennzeichen:

1. Der Körper, der nur räumliche (perspektivische) Veränderungen seiner Gestalt und Größe zeigt. Um dies jedoch an einem Körper zu entscheiden, bedarf es der Kenntnis, was perspektivische Veränderungen sind, was nicht (dies aber schließt die Kenntnis von der „Natur unseres Raumes" ein, die natürlich noch nicht bewußt zu sein braucht). Sicherlich aber ist also der so gefundene starre Körper nicht rein experimentell gefunden, er ist wesentlich schon durch Exhaustion bestimmt. Es ist klar, daß bei dieser perspektivischen Auswahl des starren Körpers gerade auch Eigenschaften, die über die „Euklidität" des Raumes entscheiden, zur Anwendung kommen. So, wenn sich ein starrer Körper in gleicher Lage längs Geraden von mir entfernt (Übereinstimmung von Parallelen und Äquidistanten, ein Kriterium, auf das Hugo v. Seeliger besonders hingewiesen hat). Natürlich kann die perspektivische Definition allein die Herstellung des wissenschaftlich exakten, feinen starren Körpers nicht leisten.

2. Der harte Körper. Die Erfahrung, daß ein Körper „hart", d. h. gegen äußere mechanische Angriffe (Druck usw.) sehr widerstandsfähig ist, möchte gelegentlich zur Meinung verführen, damit auch ein Kriterium für räumliche Unveränderlichkeit überhaupt, d. h. für den starren Körper zu haben. Tatsächlich sind viele harte Körper auch räumlich sehr starr. Doch kann die Härte allein nie Sicherheit gegen Kräfte geben, welche den Körper als Ganzes verändern (ausdehnen, zusammenziehen). So kann die Härte niemals als Definition des starren Körpers dienen, höchstens als heuristisches Prinzip für einen möglichst schwer veränderlichen Körper.

---

1) Da die Glieder unseres Körpers i. Allg. zufällig als grobe st. K. gelten können und unbewußt als Muster dienen, so erklärt sich hieraus die scheinbare Selbstverständlichkeit des groben st. K. Ganz anders liegen aber die Verhältnisse jenseits der Grenze dieser groben Schätzungen.

Damit aber gelangen wir von den zwei vorstehenden „Definitions"-Arten des starren Körpers, die nur den groben starren Körper liefern konnten, zu einer weiteren, welche bereits zum feinen starren Körper hinüberleitet.

3. Der unveränderliche Körper. Hat man einmal eine grobe Definition des starren Körpers, so kann man gewisse Wirkungen erkennen, welche die Größe und Gestalt eines Körpers ändern (z. B. Wärme, Druck usw.). Aus der so erlangten experimentellen Kenntnis dieser Wirkungen ist man dann in der Lage, sie in gewissem Maße konstant zu halten und so ihren Einfluß auf den starren Körper auszuschließen. Es wäre hiermit natürlich eine wirkliche Definition des feinen starren Körpers gegeben, wenn es gelänge, alle Veränderungen desselben auf diese Weise zu beherrschen. Aber, da viele dieser Wirkungen überhaupt durch die Änderungen des starren Körpers erst definiert und bemerkt werden, so wäre es eine Zirkeldefinition; denn um die Änderungen festzustellen, müßte ich den feinen starren Körper schon anderweitig kennen oder definiert haben. Abgesehen davon sind wir aber niemals in der Lage, alle verändernden Wirkungen zu kennen. Es sind stets noch neue innere Wirkungen möglich, die unbekannte Änderungen hervorrufen.

4. Die vierte Definition des starren Körpers ist die (schon erwähnte) durch die Gesetze der euklidischen Geometrie. Von ihr wird im nächsten Abschnitt u. a. mehr gehandelt werden.

III.

Wir wenden uns nach diesen Vorbereitungen zur Frage der eigentlichen Herstellung des wissenschaftlichen starren Körpers.

Ob ein Körper starr ist, wird für gewöhnlich mittels „Apparaten" gemessen (schon der einfache Maßstab ist ein solcher). Es wird dabei sozusagen die Starrheit des einen starren Körpers an der des anderen gemessen. Die Starrheit (auch „Genauigkeit" oder „Richtigkeit") der Apparate selbst würde wieder durch andere Apparate gemessen. Diese Rekursion kann aber nicht ins Unendliche fortgesetzt werden, es muß daher starre Körper geben, welche nicht durch Vergleich mit anderen als solche erkannt werden, welche aber, da alle übrigen an ihnen gemessen werden, die genauesten momentan herstellbaren sind. Wir bezeichnen diesen Zustand als die Hierarchie der starren Körper, und diese starren Körper höchster Art als „autogene starre Körper".

Unser Interesse konzentriert sich also notwendig auf diese autogenen starren Körper. Die vorstehende Überlegung von der Hierarchie der starren Körper zeigt, daß es immer gerade die letzten und feinsten beherrschbaren Wirkungen in der Wissenschaft sind, welche den feinsten, den autogenen starren Körper charakterisieren und von den übrigen unterscheiden. An diesen letzten und feinsten Unterschieden und Wirkungen also muß es konstatierbar sein, wo eigentlich das auswählende Prinzip zu suchen ist, das den starren Körper letzten Endes bestimmt.

Wo haben wir die Herstellung der letzten und feinsten autogenen starren Körper zu suchen? Offenbar in den Fabriken der Präzisionsmeßinstrumente letzter Feinheit, also in den Fabriken der feinmechanischen und optischen Präzisionsindustrie.

Ein Umstand jedoch, auf den hier gleich hingewiesen sei, wäre geeignet, den klaren Einblick in das Wesen dieses Herstellungsvorgangs scheinbar etwas zu erschweren. Angenommen, wir fänden bereits auf Grund eines groben Kriteriums zufällig einen Körper, der innerhalb unserer letzten Meßgenauigkeit und vielleicht darüber hinaus dem wirklichen, alsbald zu definierenden starren Körper völlig gleich käme. Kurzsichtige könnten hierdurch zur Ansicht kommen, daß der starre Körper hier tatsächlich experimentell gefunden sei (ebenso wie die zugehörige Geometrie). Kurzem Nachdenken zeigt sich jedoch, daß dieser Schein nur solange dauern kann, als wir mit unserer Genauigkeit nicht an diejenige Grenze gelangt sind, mit der jener Körper den wirklichen starren Körper repräsentiert, was unfehlbar früher oder später kommen muß. Darnach aber müßten wir wieder vor einer vollkommenen Ratlosigkeit stehen, wollten wir diesen starren Körper als den wirklichen gelten lassen.

Stellen wir uns also jetzt einmal einen solchen äußersten feinsten Fall vor. Nehmen wir an, in einer Präzisionswerkzeugfabrik solle ein feinster Meßapparat, der selbst wieder zur Prüfung anderer starrer Körper und Apparate dienen soll, gebaut werden. Man greift zu dem bisher erfahrungsgemäß besten (d. h. starrsten) Material und bringt es in eine Umgebung von größtmöglichster Konstanz. Wie dieser bisherig beste starre Körper zustande kam, dies lassen wir vorläufig offen,

wir wollen ja eben untersuchen, wie aus starrem Material ein starreres zustande kommt.

Es werde der Apparat mit aller Sorgfalt gemacht und zusammengesetzt, und soll nun geprüft werden. Mit anderen Apparaten soll er im allgemeinen nicht verglichen werden, da er ja selbst die letzte Stufe der Exaktheit des starren Körpers darstellen soll. Da bleibt für Prüfungszwecke nur das eigene Verhalten des Apparats selbst. Diese Prüfungsmethoden sind aber bei einem messenden Apparat ausnahmslos geometrische, bzw. mit solchen verknüpft. Der Konstrukteur unseres Apparats wird also die geometrischen Prüfungen des Apparats vornehmen. Wir nehmen nun an, daß dabei eine Hemmung oder Abweichung eintrete, die mit den Gesetzen der euklidischen Geometrie in Widerspruch stehe. Solche Abweichungen kommen am häufigsten wohl bei Prüfungen nach einiger Dauer vor. Denn wir beherrschen naturgemäß die schnell wirkenden Vorgänge besser als die langsam wirkenden, deren immer wieder auftreten können (Senkungen, Durchbiegungen, innere Umsetzungen und Veränderungen).

Unser ganzes Problem spitzt sich nunmehr zu auf die Frage: Was wird der Konstrukteur unter diesen Umständen tun?

Er kann zweierlei tun.

1. Er kann sagen: Die Herstellung des Apparats ist mit aller Vorsicht (bis jetzt bekannten!) erfolgt; ich habe daher hier den experimentellen Nachweis eines nichteuklidischen Raumes. Er wird dann die Größe der Abweichung messen und den Apparat nach der nichteuklidischen Geometrie, die er gefunden, umbauen.

2. Er kann sagen: Die Abweichung vom euklidischen starren Körper muß von noch unbekannten Ursachen oder einer unbekannten Verbindung bekannter Ursachen herrühren, denn einen gewöhnlichen Fehler oder Irrtum haben wir ausgeschlossen. Er wird die neue Veränderung, die durch Abweichung seines starren Körpers vom euklidischen definiert ist, als solche experimentell solange studieren, bis es ihm gelingt, auch sie stets von seinem Apparate fernzuhalten (was keineswegs sofort der Fall zu sein braucht und beliebig viele Jahre event. dauern kann).

Es hängt nun die Beantwortung unserer Kernfrage davon ab, welche der beiden Alternativen der Konstrukteur einschlagen wird. Es wäre von hohem Interesse durch eine Umfrage bei den renommiertesten Fabriken feinmechanischer und optischer Präzisionsapparate festzustellen, was für Meinungen da herrschen. Es wird natürlich die Antwort in einer allgemeinen Entscheidung zum Standpunkte 2 bestehen, doch werden wohl da und dort Kautelen hinzugefügt werden. Auch wir haben dem Gesagten noch Verschiedenes hinzuzufügen. Ich glaube, daß die meisten Konstrukteure sich glatt zu dem Standpunkt 2 bekennen werden. Der eine oder andere jedoch, der mit den modernen theoretischen Bestrebungen näher in Berührung gekommen ist, wird es für notwendig finden, zu sagen: ich suche allerdings die Abweichungen von der euklidischen Geometrie zu entfernen, aber nur, solange es möglich ist natürlich. Er meint also, wenn es einmal nicht möglich sein sollte, würde er sich dem Standpunkt 1 anschließen. Im innersten Herzen aber hofft er bestimmt, daß diese Eventualität niemals eintreten werde, und er ist nicht kritisch genug, sich zu sagen, daß selbst dann, wenn sie einmal eintritt, er noch lange nicht zu Standpunkt 1 übergehen würde, sondern bis an sein Lebensende versuchen würde, die Abweichung experimentell zu erforschen, um sie dann doch noch wegzubringen und die euklidische Geometrie durchzuführen, denn er weiß, daß er bei seiner Firma nicht viel Anklang mit seiner Entdeckung finden würde.

Bei den Versuchen nun, die besprochene Abweichung des autogenen starren Körpers experimentell zu studieren, kommt ein weiterer wichtiger Punkt in Frage, über den ebenfalls die Konstrukteure gefragt werden müßten[1]). Sämtliche Konstrukteure werden nämlich bei ihren diesbezüglichen Versuchen die geometrischen Eigenschaften ihrer Apparate ohne weiteres euklidisch in ihre Rechnungen einführen. Nun kann man ja vom experimentalistischen Standpunkt aus ohne weiteres rechtfertigen (soweit das von diesem Standpunkt aus überhaupt geht), bei den gewöhnlichen Experimenten mit nicht autogenen starren Körpern die geometrischen Eigenschaften als euklidische in die Rechnung einzuführen. Der Empirist sagt dann etwa: Durch den autogenen starren Körper, der der euklidischen Geometrie experimentell gehorche, sei diese mit überragender Genauigkeit experimentell bewiesen, so daß man bei nicht autogenen starren Körpern diese ohne Fehler einführen dürfe. Diese Überlegung versagt nun aber, und dies ist von grundlegender Wichtigkeit, bei den feinsten und letzten, neuen Abweichungen des starren Körpers, denen des autogenen starren

1) Für frdl. Mitteilungen wäre ich sehr dankbar.

Körpers. Denn bei dem autogenen starren Körper kann man sich nicht auf die experimentelle Bewiesenheit der euklidischen Geometrie an einem Vergleichskörper berufen, und für den autogenen starren Körper soll sie ja eben erst festgestellt werden. Trotz dieser Sachlage werden sämtliche Konstrukteure dennoch die euklidische Geometrie ihren experimentellen Studien der Abweichung zugrunde legen. Sie sind nämlich einfach gezwungen, etwas Derartiges zu tun, denn wenn sie es offen lassen, welcher Geometrie ihr starrer Körper gehorchen soll, so sind sie eben niemals in der Lage, die Wirkung der Abweichung von der Wirkung des Raumes zu trennen. An dieser Stelle versagt also die experimentalistische Anschauung vollkommen und nur die Versteckheit dieser Stelle[1]), die ihrer Wichtigkeit gleichkommt, hat bisher diese Einsicht wohl verhindert. Wir sehen, auch bei den Experimenten des Konstrukteurs, die zur Entfernung der Abweichung dienen, bedient er sich der euklidischen Geometrie, führt sie dabei direkt ein und gewährleistet dadurch ihre dauernde Geltung. Er muß an dieser Stelle vor jedem Experiment sich entschließen, welche Geometrie er weiter einführen will, und nimmt da natürlich die euklidische.

Dieses Vorgehen aber ist nichts anderes als „Exhaustion". Dabei ist es natürlich ganz gleichgültig, ob der gefragte Konstrukteur es zugeben will oder nicht, daß auf diesem Wege gerade der euklidische starre Körper durch Exhaustion hergestellt wird. Denn wenn ich alle Abweichungen von den euklidischen Gesetzen systematisch entferne, so erhalte ich eben den euklidischen starren Körper. Ob sich der Konstrukteur oder die Firma dessen bewußt ist, kann keinen Unterschied machen.

Was nun den Zusatz „solange es möglich ist" anlangt, so ist hier zu sagen, daß seit die Gesetze der euklidischen Geometrie bestehen, also seit 2200 Jahren, es bisher immer möglich gewesen ist, die auftretenden Abweichungen zu entfernen. Daß niemals ein Zwang vorliegen wird, eine Abweichung als unentfernbar anzusehen, geht außer aus Obigem daraus hervor, daß es dem Konstrukteur für unbeschränkte Zeit freisteht, zu sagen: die Entfernung der Abweichung sei noch nicht gelungen. Überlegt man sich ferner, daß, wie schon angedeutet, die geometrischen Beziehungen immer „als erste" in die Erklärung eines Experiments eingehen müssen (denn jeder „Apparat" bedient sich in direkter oder indirekter Form zum Messen des starren Körpers, und gegenüber den Eigenschaften des Apparats als Bekannten werden die neuen Erscheinungen gemessen), so erkennt man, daß der starre Körper immer zuerst ist, und erst ihm gegenüber die übrigen Erscheinungen festgestellt (und also in ihrer Abgrenzung definiert) werden.

Daraus folgt, daß man bei der Herstellung des autogenen starren Körpers also „noch frei" ist, da ja alle übrigen Erscheinungen erst von ihm aus abgegrenzt, definiert werden, von ihm als Hintergrund sich abheben (er ist sozusagen der willkürlich wählbare, also einfachst zu wählende Nullpunkt der Erscheinungen, denn es wird die Konstanz einer neuen Erscheinung durch diejenigen Bedingungen definiert, welche unter den betreffenden Umständen den starren Körper euklidisch konstant halten). Dies ist der Grund, warum es seit 2200 Jahren gelungen ist, alle Abweichungen von der euklidischen Geometrie zu entfernen, und warum dies für alle Zeiten weiter gelingen wird[1]).

Nun kann aber ein bereits kurz angeführter Umstand die Durchsichtigkeit des Prozesses weiter erschweren. Ist nämlich zufällig ein so starrer Körper vorhanden, daß er mit aller momentan möglichen Genauigkeit und vielleicht sogar darüber hinaus den Gesetzen der euklidischen Geometrie gehorcht, so können wir mit diesem starren Körper Apparate herstellen, welche zunächst keine Abweichung von den Gesetzen der euklidischen Geometrie zeigen werden. In einiger Hinsicht ist nämlich unsere Lage tatsächlich eine ähnliche. Dann würde eine Stellungnahme im Sinne der obigen beiden Standpunkte auf längere Zeit kaum nötig sein und die Durchsetzung des euklidischen starren Körpers würde meist nur in dem immer wachen potentiellen Willen liegen, bei gegebener Differenz stets sogleich alles zugunsten der euklidischen Geometrie zu tun. An der Sache selbst kann dieser Umstand nichts ändern.

Um einige Konsequenzen aus dem Dargelegten zu ziehen, sei zunächst auf folgendes Gleichnis hingewiesen. In einem Staate übt

1) Sie ist sozusagen gerade die äußerste Spitze an dem Kristall des st. K., wo dieser weiterwächst.

1) Mit der Exhaustion nicht Vertraute mögen sich nicht durch die Meinung abschrecken lassen, daß nun „alles" willkürlich festsetzbar sei. Es ist wie beim Thermometer sozusagen nur der Nullpunkt (und der Maßstab, doch von diesem ist hier nicht die Rede), die willkürlich (d. h. auf einfachste Art) festgesetzt werden können. Sonst bleibt alles beim Alten.

offenbar derjenige die wahre Herrschaft aus, dessen Wille sich stets durchzusetzen vermag, wenn es zu einem Konflikt kommt. Dabei braucht er in keiner Weise öffentlich hervorzutreten, ja, er kann, weil alles in seinem Sinne läuft, sich in längeren Zeiträumen jeden Eingriffs enthalten. Dennoch ist er derjenige, der das Geschehen letztlich allein nach seinem Willen formt. Wer formt nun wirklich den autogenen starren Körper, wer schreibt ihm seine Gesetze vor? Es sind die leitenden technischen Männer, die ich kurz Konstrukteure genannt habe, in den Fabriken für Präzisionsinstrumente. Sehr häufig wohl funktioniert alles von selbst. Aber in jedem Zweifelsfalle geben sie ihre Willensentscheidung, und zwar stets nach der Seite der euklidischen Geometrie. Diese Männer also bewirken die Einführung des euklidischen starren Körpers. Und wenn alle rechnenden Physiker eine nichteuklidische Geometrie errechnen sollten, solange sie diese Männer nicht dazu veranlassen können, von ihrem oben geschilderten Verfahren abzuweichen, solange bleibt das alles nur Theorie und in der Praxis wird mit jeder überhaupt erreichbaren Genauigkeit für alle Zeiten der euklidische starre Körper gelten.

Es folgt: Der autogene starre Körper wird nicht rein experimentell hergestellt, denn sonst müßte mit voller Objektivität nach allen möglichen Richtungen vorgegangen, dürfte nicht dauernd ein intensivster Druck in einer bestimmten Richtung (euklidische Geometrie) ausgeübt werden. Dieses, durch einen einseitig und bestimmt gerichteten Willen gekennzeichnete Vorgehen, das nicht nach einer objektiven Feststellung, sondern nach einem bestimmten vorgesetzten Ideal strebt, ist eben das, was ich Exhaustion genannt habe. Und ein solches ist unbestreitbar in objektiver Form in den genannten Fabriken vorhanden.

Wir haben zwei Dinge gesehen: 1. Daß durch die Konstrukteure des starren Körpers die Erfüllung der Gesetze der euklidischen Geometrie durch ihn mit allen Mitteln durchzusetzen gesucht wird. 2. Daß durch die Eigenschaft des starren Körpers als sozusagen erster und oberster Begriff der exakten Wissenschaften, wo alles Weitere erst als Differenz zu ihm festgestellt wird, tatsächlich die Freiheit gegeben ist, ihn unabhängig von allen anderen Erscheinungen nach einem bestimmten Gesetz festzusetzen. Diese beiden Dinge in ihrem Zusammenwirken verursachen, daß tatsächlich der euklidisch starre Körper durch Exhaustion in den Fabriken für Präzisionsinstrumente dauernd herausgearbeitet wird. Denn wenn auch manche Konstrukteure trotz ihres dauernden, festen Willens die euklidische Geometrie durchzuführen, eine entfernte theoretische Möglichkeit, daß darin ein Hindernis eintrete, aus mangelnder Einsicht für vorhanden glauben möchten, so bewirkt der zweite obige Umstand, daß ein solches Hindernis niemals Tatsache werden kann.

Wir sehen: Die unter den Physikern, Mathematikern usw. fast allgemein verbreitete Meinung von der rein experimentellen Natur des starren Körpers hat sich als effektiv unrichtig erwiesen. In den Fabriken wird der starre Körper nicht rein empirisch, sondern durch Exhaustion der euklidischen Geometrie hergestellt. Daß er rein experimentell überhaupt nicht herstellbar ist, dies wird manchem Leser schon aus Obigem genügend klar sein[1]), hier kam es mir in erster Linie auf die genannte Tatsache an. Auf dem sicheren Glauben an die experimentelle Natur des starren Körpers beruht aber letzten Endes die ganze empiristische Anschauungsweise unserer Zeit, mit allen auf diesem Glauben errichteten Theorien. Sicher dürfte aus vorstehenden Darlegungen hervorgegangen sein, wie überaus schlecht oder überhaupt nicht begründet und begründbar ein Dogma ist, auf dem heute weite Teile unserer wissenschaftlichen Weltanschauung und neuerdings sogar ausgedehnte Theorien basieren. Auch dürfte es von Interesse sein, von welch großer theoretischer Bedeutung für die wissenschaftliche Methodenlehre und auch für die aktuelle Physik, insbesondere wo sie in ihren Theorien auf den starren Körper oder die Geometrie unseres Raumes Bezug nimmt, die kritische Durchforschung der Vorgänge in den Fabriken für Präzisionsinstrumente sind. Sicherlich bedurfte die empiristische Anschauungsweise, bevor man ausgedehnte Theorien auf sie basieren kann, einer viel tieferen und festeren Begründung, als ihr bisher zuteil wurde. Das Obige läßt allerdings einen Versuch dazu als aussichtslos erscheinen[2]).

1) Im übrigen verweise ich auf meine „Grundlagen d. ang. Geometrie" sowie besonders auf meine letzte Schrift: „Die Grundlagen der Physik", Leipzig u. Berlin 1919. Ich habe selbst in früheren Schriften die Meinung ausgesprochen, daß es eine Art rein empirischer Herausarbeitung des st. Körpers gebe. Vollständiges Durchdenken zeigt jedoch die Unrichtigkeit dieser Auffassung.

2) Es folgt also, daß, solange die obigen Umstände bestehen — und wie wir sahen, müssen sie aus innerer Notwendigkeit immer bestehen — niemals von einer nichteuklidischen Geometrie in der Physik die Rede sein kann.

München (Universität).

(Eingegangen 10. Mai 1920.)

Kolorimetrische Untersuchungen. VI.

Von Otto Meißner.

1. Vergleichsmessungen bei Tages- und Gaslicht.

Bei einer kürzlich vorgenommenen kolorimetrischen Messung von Blätterfarben, die teils bei Tages-, teils bei Gaslicht ausgeführt war, schienen sich mir gewisse systematische Unterschiede zu ergeben. Ich fand nämlich als Differenzen im Sinne: Tageslicht minus Gaslicht $(T-G)$ für

	c	w	s[1]
Eberesche	$-0{,}2$	$-4{,}0$	$+2{,}0$
Eiche	$+1{,}0$	$-1{,}5$	$+12{,}0$
Buche	$-1{,}0$	$-4{,}0$	$-4{,}0$
Mittel:	$-0{,}1$	$-3{,}2$	$+3{,}3$
	$\pm 0{,}6$	$\pm 1{,}8$	$\pm 4{,}7$

Die Anzahl der Messungen ist nicht groß, und sie beziehen sich nicht auf identische Objekte (vielmehr waren es beide Male andere Blätter, wiewohl derselben Zweige und ziemlich sicher praktisch auch derselben Färbung). Immerhin scheinen sie bereits folgendes anzudeuten:

1. Der Weißgehalt wird bei Tage zu gering, der Schwarzgehalt zu hoch geschätzt.
2. Im Mittel, d. h. bei der Reinheit r, hebt sich beides auf.

Nun hatte ich früher bereits an 2 Papierstückchen „b“ und „c“[2]) Messungen bei Tages- und Gaslicht angestellt. A. a. O. ist nur das Mittel aus allen Messungen mitgeteilt; ich habe jedoch im Original jedesmal die Art der Beleuchtung[3]) notiert, so daß ich noch eine nachträgliche Trennung vornehmen konnte.

Wie man sieht, zeigen die Differenzen eine

Tabelle I.

$T-G$	„b“	„c“	
Filter 1	$+1{,}5 \pm 3{,}4$	$+0{,}4 \pm 4{,}0$	$+2{,}6$ (s)
„ 2	$+6{,}9 \pm 2{,}1$	$+4{,}8 \pm 4{,}2$	
„ 3	$+0{,}9 \pm 3{,}7$	$+1{,}4 \pm 4{,}9$	
Filter 4	$-4{,}5 \pm 1{,}8$	$+0{,}2 \pm 1{,}4$	$-2{,}5$ (w)
„ 4b	$-6{,}6 \pm 0{,}8$	$-2{,}0 \pm 1{,}9$	
„ 5	$-2{,}5 \pm 1{,}8$	$+0{,}4 \pm 5{,}3$	
Filter 6	$-4{,}1 \pm 3{,}5$	$+2{,}8 \pm 2{,}9$	

ausgesprochene Abhängigkeit von der Filterfarbe; der Schwarzgehalt (Filter 1—3) wird bei Tage zu hoch, der Weißgehalt (Filter 4—5) zu klein gemessen.

Die Ursachen hierfür dürften Spiegelungserscheinungen sein. Diese treten bei Tage, insbesondere bei der einseitigen Beleuchtung, bei der sie, den Zimmerverhältnissen entsprechend, erfolgen mußten, in höherem Maße auf als bei der künstlichen, fast von oben her kommenden Beleuchtung. Das bei Tage weggespiegelte Licht, das nicht in das Auge des Beobachters gelangt, läßt den Weißgehalt zu klein erscheinen; auch für den Schwarzgehalt ist die Betrachtung gültig, da dieser ja als Komplement des Weißgehalts (im Durchlaßfilter) zu 100 ermittelt wird.

2. Die Änderung der Laubfärbung im Verlaufe des Sommers.

Im Laufe des Sommers 1919 habe ich zu 6 Terminen (14. und 29. Mai, 11. und 30. Juni, 14. Juli und 28. August) eine große Anzahl (ca. 1000) Messungen der Farbe von Blättern, insbesondere der häufigeren gemacht. Eine gedrängte Zusammenfassung für die wichtigsten Pflanzenarten enthält Tabelle II.

Tabelle II.

Epoche		1—6. Buche, Eiche, Linde, Ahorn, Rüster, Pappel				7—10. Birke, Eberesche, Flieder, Spiräe			
		c	w	s	r	c	w	s	r
1919	V. 14.	94,2	12,8	60,0	27,2	89,3	8,5	77,5	14,0
„	29.	91,9	7,6	75,7	16,7	89,2	5,3	83,6	11,1
„	VI. 11.	89,8	8,0	80,6	11,4	89,2	7,5	83,4	9,1
„	30.	88,6	5,8	85,8	8,4	88,6	6,4	84,6	9,0
„	VII. 14.	88,0	6,2	80,9	6,9	88,0	6,0	87,0	7,0
„	VIII. 28.	87,4	5,0	88,6	6,4	87,7	5,5	87,1	7,4
1920	IV. 25.	93,4	05,3	73,8	20,9	89,1	4,8	86,1	9,1

Im Laufe des Sommers nehmen also Farbton, Weißgehalt und Reinheit ab — der Farbton bei den links in der Tabelle II stehenden Bäumen viel stärker als bei den andern! — der Schwarzgehalt zu. Als „Endzustand“ wird man 88. 05. 87 als Kennzahl eines ausgereiften Laubblatts ansehen können, wie ich bereits mit den

1) Die Bezeichnungen sind dieselben wie in den früheren Aufsätzen dieser Zeitschrift.

2) Diese Zeitschr. **21**, 159 ff., 1920.

3) Sogar noch ausführlicher: die Art und Stärke der Bewölkung bei Tage.

Tabelle III.

	Anzahl	$-1000\,k_s$	s[1])	$1000\,k_w$
1. Eiche	40	733 ± 108	$77{,}5 \pm 1{,}3 - (2{,}08 \pm 0{,}42)\,(c - 91{,}8)$	219 ± 154
2. Buche	30	954 ± 55	$67{,}2 \pm 1{,}1 - (6{,}72 \pm 0{,}40)\,(c - 90{,}0)$	608 ± 145
3. Linde	51	741 ± 94	$72{,}5 \pm 1{,}3 - (4{,}13 \pm 0{,}48)\,(c - 91{,}0)$	784 ± 87
4. Rüster	33	780 ± 109	$71{,}0 \pm 0{,}9 - (4{,}62 \pm 0{,}78)\,(c - 92{,}1)$	504 ± 150
5. Eberesche	30	906 ± 78	$71{,}7 \pm 1{,}2 - (4{,}40 \pm 0{,}39)\,(c - 90{,}6)$	701 ± 118
6. Erle	23	754 ± 134	$80{,}2 \pm 1{,}0 - (2{,}28 \pm 0{,}39)\,(c - 90{,}3)$	121 ± 207
7. Flieder	32	857 ± 102	$81{,}5 \pm 0{,}9 - (2{,}84 \pm 0{,}37)\,(c - 90{,}4)$	170 ± 176
8. Vitis sp.	31	788 ± 110	$71{,}7 \pm 1{,}4 - (3{,}91 \pm 0{,}56)\,(c - 92{,}4)$	-288 ± 174
9. Ampelopsis	21	735 ± 148	$84{,}7 \pm 1{,}0 - (2{,}62 \pm 0{,}51)\,(c - 90{,}6)$	-211 ± 214
10. Brennnessel	28	623 ± 157	$86{,}3 \pm 1{,}9 - (1{,}35 \pm 0{,}32)\,(c - 90{,}8)$	-214 ± 184

1) Für $c = 88$ (Endfärbung) wird nach den Formeln im Durchschnitt $s = 88$ Proz. — Das quadratische Glied wird (positiv aber) überall sehr klein.

selbstverfertigten Hauchblattfiltern im Herbst 1918 gefunden hatte[1]).

Stellt man den Gang als quadratische Funktion der Zeit (t_0 = Ende Juni; Zeiteinheit für $t = 1/2$ Monat) dar, so erhält man die nachstehenden Formeln:

1—6:

$$\begin{aligned} c &= 90{,}0 - 1{,}00\,(t - t_0) + 0{,}086\,(t - t_0)^2 \\ &\quad + 0{,}2 \pm 0{,}25 \qquad \pm 0{,}072 \\ w &= 7{,}6 - 0{,}67\,(t - t_0) + 0{,}068\,(t - t_0)^2 \\ &\quad + 0{,}7 \pm 0{,}35 \qquad \pm 0{,}104 \\ s &= 79{,}6 + 3{,}99\,(t - t_0) - 0{,}45\,(t - t_0)^2 \\ &\quad + 1{,}8 \pm 0{,}81 \qquad \pm 0{,}27 \\ r &= 12{,}8 - 2{,}98\,(t - t_0) + 0{,}31\,(t - t_0)^2 \\ &\quad + 0{,}9 \pm 0{,}42 \qquad \pm 0{,}12 \end{aligned}$$

7—10:

$$\begin{aligned} c &= 88{,}7 - 0{,}15\,(t - t_0) - 0{,}002\,(t - t_0)^2 \\ &\quad + 0{,}1 \pm 0{,}05 \qquad \pm 0{,}015 \\ w &= 6{,}5 - 0{,}20\,(t - t_0) \\ &\quad + 0{,}6 \pm 0{,}25 \\ s &= 83{,}9 + 1{,}28\,(t - t_0) - 0{,}119\,(t - t_0)^2 \\ &\quad + 0{,}8 \pm 0{,}37 \qquad \pm 0{,}107 \\ r &= 9{,}6 - 1{,}30\,(t - t_0) + 0{,}115\,(t - t_0)^2 \\ &\quad + 0{,}9 \pm 0{,}40 \qquad \pm 0{,}119 \end{aligned}$$

t_0 = Ende Juni; Einheit von $t = 1/2$ Monat; theoretisch $w + s + r = 100$.

Daß das quadratische Glied jedesmal das entgegengesetzte Vorzeichen hat wie das lineare, ist kein Zufall, sondern liegt in der Natur der Kurven, die einen hyperbelastähnlichen (oder exponentiellen der Form $e^{-s(t-t_0)}$) Charakter haben.

In diesem Jahre (1920) ist infolge des warmen März und April die Vegetation schon erheblich weiter fortgeschritten als 1919. Dies zeigt deutlich die letzte Zeile der Tabelle II. Der Farbton entspricht bei Buche, Eiche usw. etwa der 1919 am 20. Mai, 1920 ist also dem vorangegangenen Frühjahr um ca. 25 Tage = $3\,1/2$ Wochen voraus. (Bei Nr. 7—10 ist die Änderung im Laufe des Sommers zu gering.) Abweichend verhält sich nur der Weißgehalt, der 1920 sich kleiner ergab als er 1919 (im Mittel) überhaupt beobachtet wurde. Das dürfte zunächst daran liegen, daß 1919 die Farbenbestimmung meist bei Gaslicht vorgenommen wurde. Rechnet man demgemäß „zur Reduktion" der Werte von 1920 etwa $2\,1/2$ Proz. zum Weißgehalt hinzu, $2\,1/2$ Proz. vom Schwarzgehalt ab, so bekommt man für die Epoche 1920 IV. 25. jetzt auch bei w und s (und ebenso bei den Nr. 7—10 der Tabelle!) Werte, die solchen etwa vom 20. Mai 1919 entsprechen. Man sieht also, wie genau auf die Gleichartigkeit der angestellten Beobachtungen zu achten ist, da sonst Vergleiche leicht zu falschen Schlüssen führen können. (Ebenso ist stets das genau passende Filter anzuwenden; gerade hier, bei $c \sim 90$, hätte die Benutzung der roten Filter 2 und 3 statt der blauen 4 und 4b für den Weißgehalt erheblich zu große Werte gegeben[1]).

3. Zusammenhang zwischen Farbton und Schwarzgehalt der Blätter.

Auch den Zusammenhang zwischen c und s (sowie w) habe ich untersucht. Die Blätter werden zugleich „grüner" und „dunkler", d. h. c nimmt ab, s zu. In Tabelle III ist k_s der Korrelationsfaktor, s ist als lineare Funktion von c angegeben. k_s ist stets sehr nahe an 1; ferner kann man sagen, daß bei Änderung von c um 1 Einheit nach grün hin s um etwa $3\,1/2$ Proz. wächst. Viel kleiner ist k_w, das positiv sein sollte[2]), sich aber z. T. als negativ, oft als $<$ als sein mittlerer Fehler, ergab. Das liegt wohl an der Unsicherheit der Beobachtung der an sich nur kleinen Werte des Weißgehalts (vgl. auch die oben in Nr. 2 gemachte Bemerkung über die Vergleichbarkeit der Beobachtungen).

1) Diese Zeitschr. **20**, 83—85, 1919.

1) Diese Zeitschr. **21**, 161, 1920.

2) Bei den Baumarten ist es überall relativ groß, der Zusammenhang also als sicher anzusehen.

Potsdam, 29. April 1920.

(Eingegangen 10. Mai 1920.)

Über die Möglichkeit der optischen Abbildung von Molekulargittern [1]).

Von M. Wolfke.

Wir wollen hier die Möglichkeit einer optischen Abbildung von molekularen Gebilden näher untersuchen.

Eine direkte Abbildung einer molekularen Struktur mit irgendeiner Strahlenart ist undenkbar, und zwar aus folgendem Grunde: Die zur Abbildung notwendige Wellenlänge müßte so klein sein, daß ihr gegenüber eine Anhäufung von Molekülen, z. B. ein Kristallgitter, nicht als ein Kontinuum erscheinen, sondern jedes Molekül für sich ein Beugungsbild erzeugen würde. Nur dann kann das Beugungsbild, das sogenannte primäre oder Zwischen-Bild, entstehen. Ist aber die Wellenlänge genügend klein, so wird die Entstehung eines Abbildes, d. h. des sekundären Interferenzbildes ausgeschlossen sein, da dann auch die Linsen und die Spiegel nicht mehr als Kontinua dieser Wellenlänge gegenüber erscheinen und eine Brechung oder Reflexion in gewöhnlichem Sinne nicht zustande kommen kann.

Es ist aber denkbar, den Abbildungsvorgang, den man theoretisch stets in zwei Stadien trennt, auch praktisch zu trennen und die Erzeugung des primären Bildes z. B. den Röntgenstrahlen zu überlassen und das sekundäre Bild mit sichtbarem Licht zu erzeugen, indem man in einem optischen Abbildungssystem das primäre Bild durch das mittels Röntgenstrahlen photographisch aufgenommene Beugungsbild ersetzt. Allerdings kann dieses Verfahren nicht in allen beliebigen Fällen ein ähnliches Abbild liefern, da die Photographie des Beugungbildes nur seine Intensitätsverteilung, d. h. die Amplituden wiedergibt, nicht aber die Phasenverteilung, die bei der Entstehung des Abbildes im allgemeinen ebenfalls eine maßgebende Rolle spielt.

Die nähere Untersuchung dieser Frage führte mich zu einem neuen Satz der Abbildungstheorie, der die Realisierung einer optischen Abbildung von Molekulargittern prinzipiell ermöglicht. Dieser Satz lautet:

> Bei monochromatischer, paralleler, senkrechter Beleuchtung ist das Beugungsbild eines Beugungsbildes eines symmetrischen Objektes ohne Phasenstruktur identisch mit dem Abbild dieses Objektes.

Um diesen Satz zu beweisen, knüpfen wir an die allgemeinen Gleichungen der Abbildungstheorie an [2]).

Bei einer punktförmigen Lichtquelle ist die Intensitätsverteilung im Beugungsbild (Zwischenbild) durch folgenden Ausdruck gegeben [3]):

$$I_1 = \text{const.} \left| \iint\limits_{\text{Objekt}} dX\,dY\,\varphi(X,Y) \cdot \sqrt{\cos(\varepsilon - u_0)} \cdot \cos 2\pi \left[\psi(X,Y) - \frac{pX+qY}{l\lambda'} - \frac{n}{n'} \cdot \frac{\xi X+\eta Y}{\lambda'} \right] \right|^2 +$$

$$+ \text{const.} \left| \iint\limits_{\text{Objekt}} dX\,dY\,\varphi(X,Y) \cdot \sqrt{\cos(\varepsilon - u_0)} \cdot \sin 2\pi \left[\psi(X,Y) - \frac{pX+qY}{l\lambda'} - \frac{n}{n'} \cdot \frac{\xi X+\eta Y}{\lambda'} \right] \right|^2 . \qquad (1)$$

wo die Integration über das ganze Objekt zu erstrecken ist. In diesem Ausdruck bedeuten: X, Y die Koordinaten in der Objektebene, ξ, η die angulären Koordinaten des Beugungsbildes, p, q die Koordinaten der Lichtquelle, l den Abstand der Lichtquelle von der Objektebene, λ' die Wellenlänge, die zur Erzeugung des Beugungsbildes benutzt wurde, n, n' die beiden Brechungsindices des Objekt- und des Bildraumes, $\varphi(X,Y)$ den Durchlässigkeitskoeffizienten, $\psi(X,Y)$ die Phasenverzögerung im Objekt und $\sqrt{\cos(\varepsilon - u_0)}$ den Schwächungsfaktor nach dem Lambertschen Gesetz.

Für paralleles Licht senkrecht zur Objektebene ist $l = \infty$ und $p = q = 0$. Findet die Abbildung in der Luft bei kleinen Öffnungswinkeln statt, so ist:

$$n = n' = 1 \quad \text{und} \quad \sqrt{\cos(\varepsilon - u_0)} = 1.$$

Außerdem kann man bei Objekten ohne ausgeprägte Phasenstruktur $\psi(X,Y) = \text{const.} = 1$ setzen und der Ausdruck (1) geht in den folgenden über:

$$I_1 = \text{const.} \left| \iint\limits_{\text{Objekt}} dX\,dY\,\varphi(X,Y) \cdot \cos \frac{2\pi(\xi X+\eta Y)}{\lambda'} \right|^2 + \left| \right.$$

$$+ \text{const.} \left| \iint\limits_{\text{Objekt}} dX\,dY\,\varphi(X,Y) \cdot \sin \frac{2\pi(\xi X+\eta Y)}{\lambda'} \right|^2 . \left| \right. \qquad (2)$$

1) Vorgetragen in der Sitzung der Schweiz. Phys. Ges. in Zürich, am 24. April 1920.

2) M. Wolfke, Ann. d. Phys. (4), **39**, 569, 1912, Habilitationsschr. Zürich 1914.

3) l. c., Formel (IIIa), S. 588.

Ist das Objekt symmetrisch in bezug auf die X- und Y-Achsen, dann ist der Durchlässigkeitskoeffizient $\varphi(X, Y)$ eine symmetrische Funktion und das zweite Integral des obigen Ausdruckes (2) verschwindet:

$$\int\limits_{\text{Objekt}}\int dX\,dY\,\varphi(X,Y)\cdot\sin\frac{2\pi(\xi X+\eta Y)}{\lambda'}=0. \quad (3)$$

Der Ausdruck (2) reduziert sich alsdann zu:

$$I_1=\text{const.}\left|\int\limits_{\text{Objekt}}\int dX\,dY\,\varphi(X,Y)\cos\frac{2\pi(\xi X+\eta Y)}{\lambda'}\right|^2. \quad (4)$$

Dieser Ausdruck (4) gibt uns die Intensitätsverteilung im Beugungsbild unseres Objektes und gleichzeitig die Schwärzungsverteilung in der photographischen Aufnahme des Beugungsbildes.

Wir wollen jetzt das Beugungsbild des photographisch aufgenommenen Beugungsbildes (4) berechnen, indem wir es in die vordere Brennebene des Objektives eines optischen Systems setzen. Der Durchlässigkeitskoeffizient dieser photographischen Aufnahme wird durch die Wurzel $\sqrt{I_1}$ aus der Intensität I_1 (4) gegeben. Dementsprechend wird die Lichtbewegung S_2 im Beugungsbild des Beugungsbildes (4) bei monochromatischer, paralleler, senkrechter Beleuchtung durch folgenden Ausdruck gegeben[1]):

$$S_2=\text{const.}\int\limits_{\text{Beugungsbild}}\int d\xi\,d\eta\int\limits_{\text{Objekt}}\int dX\,dY\,\varphi(X,Y)\cdot\cos\frac{2\pi(\xi X+\eta Y)}{\lambda'}\cdot\sin 2\pi\left[\frac{t}{T}-\Psi(\xi,\eta)-\frac{x\xi+y\eta}{\lambda}\right], \quad (5)$$

wo das erste Integral über das ganze Beugungsbild (4) zu erstrecken ist. Hier bedeuten: t die Zeit, T die Schwingungsperiode des neuen Lichtes, $\Psi(\xi,\eta)$ die eventuelle Phasenverzögerung in der photographischen Platte, x, y die Koordinaten des neuen Beugungsbildes und λ die neue Wellenlänge. Wir nehmen an, daß die photographische Platte keine Phasenstruktur besitzt, so daß $\Psi(\xi,\eta)=\text{const.}=1$ gesetzt sein darf. Da das Integral (3) gleich Null ist, so wird auch das folgende Integral verschwinden:

$$\int\limits_{\text{Beugungsbild}}\int d\xi\,d\eta\int\limits_{\text{Objekt}}\int dX\,dY\,\varphi(X,Y)\sin\frac{2\pi(\xi X+\eta Y)}{\lambda'}\cdot\cos 2\pi\left[\frac{t}{T}-\Psi(\xi,\eta)-\frac{x\xi+y\eta}{\lambda}\right]. \quad (6)$$

Subtrahieren wir dieses Integral (6) vom Ausdruck (5), so erhalten wir schließlich nach einfacher Umformung:

$$S_2=\text{const.}\int\limits_{\text{Objekt}}\int dX\,dY\,\varphi(X,Y)\int\limits_{\text{Beugungsbild}}\int d\xi\,d\eta\cdot\sin 2\pi\left[\frac{t}{T}-\frac{\xi(x-X\lambda/\lambda')}{\lambda}-\frac{\eta(y-Y\lambda/\lambda')}{\lambda}\right]. \quad (7)$$

Vergleicht man diesen Ausdruck (7) für das Beugungsbild unseres Beugungsbildes (4) mit dem Ausdruck für die Lichtbewegung im Abbild eines nicht selbstleuchtenden Objektes bei monochromatischer, paralleler, senkrechter Beleuchtung[2]):

$$S_a=\text{const.}\int\limits_{\text{Objekt}}\int dX\,dY\,\varphi(X,Y)\int\limits_{\text{Apertur}}\int d\xi\,d\eta\cdot\sin 2\pi\left[\frac{t}{T}-\frac{\xi(x-X)}{\lambda}-\frac{\eta(y-Y)}{\lambda}\right]. \quad (8)$$

so ersieht man ohne weiteres, daß er mit demselben formell identisch ist.

Damit ist der neue Satz bewiesen.

Der oben bewiesene Satz wurde an verschiedenen optischen Gitterstrukturen mit parallelem Licht der gelben Quecksilberlinie geprüft, wobei er sich in allen Fällen als bestätigt erwiesen hat. Bei diesen Versuchen muß, um scharfe Bilder zu erhalten, eine möglichst starke Lichtquelle mit sehr kleinem punktförmigen Kollimatorspalt benutzt werden.

Beim Vergleich der Ausdrücke (7) und (8) sieht man, daß die Koordinaten des Objektes im Verhältnis λ/λ' vergrößert sind, so daß bei dieser Abbildungsmethode allein durch den Übergang von der einen Wellenlänge λ' zu der anderen λ eine Vergrößerung des Abbildes im Verhältnis der angewandten Wellenlängen erzielt wird. So z. B. wenn man zur Erzeugung des primären Beugungsbildes Röntgenstrahlen benutzt und dann das Abbild mit sichtbarem Licht entstehen läßt, erscheint das Abbild bereits ca. 10000 mal vergrößert. Bei Benutzung eines passenden optischen Systems kann man leicht eine totale 1000000- bis 10000000fache Vergrößerung erreichen. Diese Vergrößerung würde vollständig genügen, um die Molekularstruktur sichtbar zu machen. Um auf diesem Wege optische Bilder von Kristallgittern zu er-

1) l. c. Formel (10), S. 591.
2) l. c. zweite Formel für S_a auf S. 593.

halten, müßte man allerdings Röntgenaufnahmen herstellen, bei denen nur die an einer einzigen Kristallfläche reflektierten Strahlen zur Interferenz gelangen. Eine Andeutung derartiger Beugungsbilder erhielt Hupka[1]) bei seinen Versuchen über die Reflexion der Röntgenstrahlen.

Die hier beschriebene Abbildungsmethode erlaubt also die bis jetzt theoretisch vorhandene Grenze der optischen Abbildung zu erweitern und gibt eine prinzipielle Möglichkeit, die molekulare Kristallstruktur optisch sichtbar zu machen.

1) E. Hupka, Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 369, 1913.

Zürich, April 1920.

(Eingegangen 21. Mai 1920.)

Über eine physiologische Erklärung der Referenzflächen der Gestirne.

Von Aloys Müller.

Der physiologischen Erklärungen der Referenzflächen der Gestirne hat es schon manche gegeben. Keine von ihnen ist besonders für solche, die der Physiologie und Psychologie ferner stehen, auf den ersten Blick so bestechend wie die, die Herr Jaeckel in dieser Zeitschrift[1]) aufstellt, weil sie in überraschend einfacher Weise aus den optischen Konstanten des Auges die numerischen Werte der Referenzflächen zu ergeben scheint, die man in neuerer Zeit bestimmt haben will. Ich möchte aber zeigen, daß sie Bedenken ausgesetzt ist, die, wie ich glaube, nicht zu überwinden sind.

Vorab sei bemerkt, daß die Formel für Δa noch allgemeiner gefaßt werden kann. Man sieht leicht ein, daß sie, je nachdem B vom Beobachter aus vor oder hinter A liegt, lautet:

$$\Delta a = \frac{a^2}{\beta p \pm a}.$$

An erster Stelle scheinen mir nun die physiologischen Grundlagen der Theorie teils nicht klar herausgearbeitet, teils irrtümlich gedeutet zu sein. Der benutzte Wert von 35″ hat mit der Trennung zweier Punkte nichts zu tun, sondern ist die vielfach angenommene, durchschnittliche Winkelgröße, die ein „Punkt“ bei mittleren Helligkeitsunterschieden von Objekt und Grund und bei nicht zu starker absoluter Helligkeit wenigstens haben muß, um überhaupt sichtbar zu sein. Ein Gegenstand mit dieser Winkelgröße erzeugt auf der Netzhaut den „physiologischen Punkt“, der der eben wahrnehmbare Teil eines wegen der Unvollkommenheit des dioptrischen Augenapparates stets vorhandenen Zerstreuungskreises ist. Die „Punkte“ A und B müssen beide wenigstens diesen Gesichtswinkel besitzen, damit sie überhaupt gesehen werden können. Wir geben nun A und B einen beliebigen Gesichtswinkel $> 35''$ und nehmen an, B liege in der Anfangsstellung unmittelbar hinter A auf der Visierlinie. Läßt man jetzt B sich von A entfernen, während auf A monokular akkommodiert wird, so wächst der Zerstreuungskreis von B und damit auch sein wahrnehmbarer Teil. Aber B wird, wie die Beobachtungen lehren, dadurch noch nicht undeutlich. Eine merkliche Undeutlichkeit von B entsteht erst, wenn der wahrnehmbare Teil seines Zerstreuungskreises einen gewissen Grenzwert überschreitet. In dem Augenblick, wo dieser Grenzwert erreicht wird, ist die Entfernung $AB = \Delta a$. Die abbildenden Strahlenkegel des „Punktes“ B schneiden, sobald sich B von A entfernt, auf der Objektebene eine Fläche aus, deren Winkelgröße mehr als 35″ beträgt und sich unschwer berechnen läßt. Machen wir nun die Hypothese, daß der wahrnehmbare Teil des Zerstreuungskreises von B jenen Grenzwert dann erreicht, wenn der abbildende Strahlenkegel des auf der Visierlinie liegenden geometrischen Punktes des „Punktes“ B auf der Objektebene eine Fläche ausschneidet, die unter dem Gesichtswinkel von 35″ erscheint, dann läßt sich die zu Anfang mitgeteilte Gleichung der Theorie ableiten.

Wenn man auf diese Weise an Stelle der geometrischen Verhältnisse die wirklichen physiologischen setzt, dann wird die hypothetische Grundlage der Ableitung deutlich. Eine unmittelbare Begründung der Hypothese wird sich schwerlich finden lassen. Nimmt man statt 35″ etwas kleinere Werte, dann gibt die Formel die von Hess und v. Rohr[1]) nach einer anderen Formel berechneten Werte überraschend genau.

Indem wir aber diese Werte mit der Formel verknüpfen, stehen wir schon vor der Frage der Deutung der Formel. Nach Herrn J. gibt sie die Tiefenschärfe bei monokularem Sehen an. Das ist ein Irrtum. Δa ist auch in seiner Ableitung offensichtlich die Strecke, innerhalb der bei monokularer Betrachtung alle Punkte scharf gesehen werden, wenn auf den Endpunkt von a akkommodiert wird. Δa ist also das, was man in der Physiologie als Akkommodationslinie oder Bildtiefe kennt. Daß die Formel sich nicht auf die Tiefenschärfe bei monokularem Sehen bezieht, läßt sich auch an den Beobachtungen nachprüfen. Sie

1) Diese Zeitschr. **21**, 262, 1920.

1) Graefe-Saemisch, Handb. d. ges. Augenheilkunde³, II. Teil, Kap. XII, S. 115, 1910.

müßte in diesem Falle die Beobachtungen Wundts wiedergeben können[1]). Wundt ließ einen senkrechten Faden in einem Kasten von bestimmten Anfangsstellungen aus der monokular beobachtenden Versuchsperson näher oder ferner kommen. Die Versuchsperson mußte den Augenblick angeben, wo sie dabei den Faden näher oder ferner sah. Die Strecke, die der Faden zurücklegt, bis er gegenüber seiner Ausgangsstellung näher oder ferner erschien, ist unsere Strecke Δa, falls die Deutung der Formel richtig ist. Wundt nennt sie die Unterscheidungsgrenze. Ich habe die Wundtschen Versuche nach der Formel für die beiden extremen Pupillenwerte $p = 2$ mm und $p = 8$ mm und für $\beta = 5{,}9 \cdot 10^3$ berechnet und stelle die beobachteten und berechneten Werte in der folgenden Tabelle zusammen.

Entfernung des Fadens in cm	Unterscheidungsgrenze in cm: beobachtet bei Annäherung	beobachtet bei Entfernung	berechnet für $p = 8$ mm bei Annäherung	berechnet für $p = 8$ mm bei Entfernung	berechnet für $p = 2$ mm bei Annäherung	berechnet für $p = 2$ mm bei Entfernung
250	12	12	12,5	13,9	43,7	67,2
220	10	12	9,8	10,8	34,6	50,4
200	8	12	8,1	8,8	28,9	40,8
180	8	12	6,9	7,1	23,8	32,4
100	8	11	2,1	2,2	7,8	9,3
80	5	7	1,3	1,3	5,1	5,8
50	4,5	6,5	0,5	0,5	1,9	2,2
40	4,5	4,5	0,34	0,34	1,3	1,4

Es mangelt ersichtlich fast jede Übereinstimmung. Man erkennt auch, daß innerhalb der möglichen Pupillenwerte kein Wert der Konstanten β eine Übereinstimmung herstellen kann.

An zweiter Stelle mache ich darauf aufmerksam, daß die Theorie, ohne es ausdrücklich zu bemerken, zur Ableitung der Referenzflächen der Gestirne mehrere Voraussetzungen einführt, die nicht zu ihrem Grundgedanken gehören, die unbewiesen sind und teilweise mit der Erfahrung in Widerspruch stehen. Aus der Formel folgen die Werte von a für den Grenzfall $\Delta a = \infty$. Um nun diese Werte als Radienvektoren der Referenzflächen ansprechen zu können, muß die Theorie die folgenden vier Voraussetzungen hinzufügen: 1. daß alle Punkte auf Δa in einer Ebene gesehen werden, 2. daß diese Ebene in der Entfernung des Grenzwertes von a gesehen wird, 3. daß das, was monokular festgestellt ist, auch binokular bestehen bleibt, 4. daß von Gegenständen im Sehraum der Satz gilt: Je weiter, desto größer; je näher, desto kleiner.

1) Nagel, Handb. d. Physiologie des Menschen 3, 377, 1905.

Die erste Voraussetzung würde nur dann aus dem Grundgedanken folgen, wenn die Akkommodation für das monokulare Sehen der einzige Faktor wäre, von dem die Sehferne innerhalb der Grenzwerte von a abhinge. Aber weit wesentlichere Faktoren, die die Sehferne bestimmen, sind Sehgröße, Helligkeit, Farbe, Zugehörigkeit zu einem bestimmten Wahrnehmungskomplex u. a., die unter sich wieder zusammenhängen; auch Astigmatismus und wahrscheinlich der Konvergenzimpuls gehören hierher. Aber auch abgesehen davon kann die Akkommodation das nicht leisten, was die Theorie von ihr verlangt, weil sie praktisch für das Tiefensehen über 5 bis 6 m hinaus gar keine Bedeutung mehr hat. Träfe die erste Voraussetzung zu, weil die Sehferne für das monokulare Sehen ausschließlich von der Akkommodation bestimmt wäre, dann würde die zweite aus ihr folgen. Weil aber die erste nicht gilt, gilt auch die zweite nicht. Es ist übrigens gleichgültig, ob diese beiden Voraussetzungen allgemein bestehen oder ob sie nur auf Gegenstände wie die Gestirne angewandt werden sollen, über deren wirkliche Entfernung wir aus der direkten Sinneswahrnehmung nicht unterrichtet sind; im letzteren Falle sind von den genannten Faktoren Konvergenzimpuls und Astigmatismus zu streichen.

Selbst wenn nun aber auch diese beiden ersten Voraussetzungen für das monokulare Sehen richtig wären, würden sie für das in der Wirklichkeit vorhandene binokulare nicht mehr zutreffen. Denn dann bestimmen noch andere, weit einflußreichere Bedingungen die Sehferne mit, die die engen Grenzen zersprengen, in die das monokulare Sehen den Sehraum bannen will. Tatsächlich sehen die meisten Menschen die Gestirne auch nicht in der Entfernung, in der wir Gegenstände sehen, die im Mittel 25—30 m von uns abliegen. Wo diese Empfindung einmal vorkommt, ist sie, wie ich gezeigt habe[1]), nicht als primäre Empfindung zu deuten. Hätte nun schließlich die Theorie sogar nachgewiesen, daß wir die Gestirne in der Entfernung der Grenzwerte von a sehen, dann müßte sie, um die Änderung der Sehgröße mit der Höhe wenigstens teilweise erklären zu können, noch die Richtigkeit der vierten Voraussetzung dartun. Daß das eine sehr schwierige Angelegenheit ist, habe ich in dem eben genannten Buche ebenfalls nachgewiesen[2]).

Drittens steht die Theorie in Widerspruch mit psychologischen Grundlagen und Befunden

1) A. Müller, Die Referenzflächen des Himmels und der Gestirne, 1918, S. 132.
2) a. a. O. S. 129 ff.

bei unserem Problem. Sie versteht unter der Referenzfläche insofern etwas Psychisches, als sie sie durch die Sehfernen bestimmt sein läßt; die Referenzfläche gibt die Entfernungen an, in denen wir die Gestirne wirklich sehen. Aber die Referenzfläche ist lediglich die geometrische Deutung der Beziehungen zwischen Sehgröße und Höhe, also ausschließlich ein Mittel zur Beschreibung von Tatsachen. Deshalb können die Maße einer Referenzfläche nicht absolut angegeben werden, sondern lassen sich mit jeder beliebigen positiven reellen Zahl multiplizieren. Die Sehgröße ist etwas Psychisches. Eben darum läßt sie sich genau so wenig in Zentimetern ausdrücken, wie sich beispielsweise Längen in Dyn ausdrücken lassen. Jede Größe kann nur durch gleichartige Größen gemessen werden. Ich habe alle diese Dinge schon in meinem Buche über die Referenzflächen behandelt; dort ist auch (S. 64) gezeigt, was es mit dem „Tellermond" für eine Bewandtnis hat. Weil aber immer wieder Mißverständnisse dieser verhältnismäßig einfachen Probleme vorkommen, habe ich sie zusammen mit anderen noch einmal ausführlicher in einer Arbeit besprochen, die unter dem Titel „Beiträge zu dem Problem der Referenzflächen des Himmels und der Gestirne" demnächst in dem „Archiv für die gesamte Psychologie" erscheint. Für alle Einzelheiten sei auf diese Arbeit verwiesen [1]).

Die Theorie steht auch ratlos gegenüber manchen Befunden bei den Referenzflächen der Gestirne. Von ihr aus sind z. B. die in dem Buche [2]) festgestellten Unterschiede zwischen der Referenzfläche des Wolkenhimmels und der Referenzfläche der Wolken, zwischen der Referenzfläche des Sternenhimmels und der Referenzfläche der Sterne ganz unverständlich. Auch ist nicht abzusehen, wie die Theorie mit den Referenzflächen des Himmels überhaupt zurecht kommt, die doch ohne Zweifel zu den Referenzflächen der Gestirne in Beziehung stehen. Vor allem aber muß betont werden, daß die Theorie nicht auf die Änderung der Sehgröße der Sterndistanzen paßt. Denn beim Nachthimmel bleibt die Pupillenöffnung beim Sehen in allen Höhen konstant. Sie kann unter Umständen sogar, wenn der Horizont heller ist, beim Sehen in horizontaler Richtung kleiner werden, müßte also dann die umgekehrte Erscheinung — eine Verkleinerung der Sterndistanzen in niederen Höhen — zur Folge haben, als sie in Wirklichkeit vorliegt.

Viertens müßte, wenn die Theorie recht hätte, bei willkürlich hervorgerufener Pupillenverengerung eine Verkleinerung der Sehschärfe der Gestirne eintreten, die die Irradiation nicht nur aufzuheben, sondern weit stärker als sie in umgekehrten Sinne zu wirken imstande wäre. Man kann sich aber davon überzeugen, daß das dann nicht der Fall ist, wenn das Mittel, das zur Verengerung der Pupillenöffnung verwandt wird, den Wahrnehmungskomplex, von dem das Gestirn einen Teil bildet, im wesentlichen ungeändert läßt. Die von Herrn Meyer beschriebenen [1]) und von Herrn Jaeckel besonders verwerteten, im übrigen längst bekannten Experimente lassen sich also nicht durch die Annahmen deuten, die Herr Jaeckel an den Einfluß der Blende auf die Größe der Zerstreuungskreise knüpft. An ihrer Wirkung sind mehrere Faktoren beteiligt, in erster Linie das Verschwinden des ganzen horizontalen Wahrnehmungskomplexes, dann der unmittelbare psychische Einfluß der engen Blende auf die Sehgröße, die Lichtschwächung infolge der Abblendung, die teils mittelbar durch Verringerung der Irradiation, teils unmittelbar auf die Sehgröße wirkt (und vielleicht noch anderes). Übrigens läßt sich der Einfluß enger Blenden auf die Sehgröße an jedem geeigneten irdischen Objekte feststellen; das Objekt erscheint aber dabei nicht näher, sondern ferner.

1) Diese Zeitschr. **21**, 168, 1920.

Büttgen-Vorst (Kr. Neuß), 7. Juli 1920.

(Eingegangen 16. Juli 1920.)

1) Diese Arbeit wird auch eingehend zu den in dieser Zeitschrift veröffentlichten Studien von Witte „Über den Sehraum" Stellung nehmen. Es wird leicht sein, von ihr aus die nicht in allem zutreffende Kritik zu beurteilen, die Geipel an Witte übt (diese Zeitschr. **21**, 169, 1920). Ausführlich werden auch die Arbeiten von Dember und Uibe (Leipziger Berichte, Math.-phys. Kl. **69**, 139, 1917; **69**, 391, 1917; **69**, 485, 1918) besprochen, im besondern die gerade dem Physiker sympathische Theorie einer optisch-atmosphärischen Grenzschicht.

2) a. a. O. S. 96 ff.

Über die scheinbare Verkleinerung entfernter Objekte.

Von K. Horovitz.

In einer Zuschrift an die Physikalische Zeitschrift (Heft 6 vom 15. März 1920) beschreibt Professor Stefan Meyer die scheinbare Verkleinerung, die man beobachtet, 1. wenn der Mond oder andere entfernte Objekte durch ein Rohr („das Loch ist dabei so groß, daß der geometrische Strahlengang nicht beeinflußt wird") statt mit freiem Auge oder 2. mit einem Auge allein statt mit beiden Augen betrachtet werden.

Analoge optische Täuschungen, sogenannte

Mikropsie, beobachtet man beispielsweise nach Atropineinträufelung; Makropsie, eine Vergrößerung, nach Eserineinspritzung. Diese Wahrnehmungen werden durch Änderung der Akkommodation und Konvergenzanstrengung gedeutet, und zwar soll „die besonders hochgradige Anstrengung der Akkommodation die Ursache der Mikropsie sein". (Siehe z. B. Helmholtz, Physiologische Optik, Bd. III, S. 323, Zusatz von Kries u. a., Nagels Handb. der Physiologie, Bd. III, 2. Hälfte, S. 389 u. f.).

Nun ist es eigentümlich, daß die oben erwähnten Versuche, welche scheinbare Verkleinerung ergeben, mit einer Pupillenerweiterung verbunden sind; das Verdecken des einen Auges ruft durch den konsensuellen Pupillenreflex die Vergrößerung der Pupille des freien Auges hervor. Die Verwendung einer Röhre, wie sie Prof. Meyer angibt, bewirkt die Abblendung alles seitlichen Lichtes und auch hier tritt, wie man sich leicht überzeugen kann, eine Vergrößerung der Pupille ein. Es liegt nun nahe anzunehmen, daß das Auge auf diese plötzliche Pupillenerweiterung mit einer Einstellung reagiert, die die Erweiterung wieder aufzuheben strebt und das ist Konvergenz- und Akkommodationsanstrengung, die von Pupillenverengung begleitet ist. (Siehe z. B. Nagels Handb. der Physiologie, Bd. III, 1. Hälfte, S. 67, 2. Hälfte, S. 321.)

Es ist aber jede Anstrengung der Akkommodation mit einer scheinbaren Verkleinerung, jedes Nachlassen mit einer scheinbaren Vergrößerung verknüpft (Helmholtz a. a. O., S. 322 unten; Nagel, S. 390). Dadurch wäre also die Mikropsie in den beiden Fällen, die Prof. Meyer anführt, erklärt. Längere Röhren wirken ähnlich, wie stenopäische Lücken, bei deren Verwendung die Verkleinerung entfernter Gegenstände bekannt ist; durch Versuche mit Glasröhren habe ich mich überzeugt, daß in diesem Fehler die Änderung der Augenpupille keine wesentliche Rolle spielt.

Ich habe auch versucht, die Wirkung der Vergrößerung der Pupillen dadurch zu ermitteln, daß schwarze Gläser vorgehalten und entfernt wurden; dabei geben alle Personen übereinstimmend an, eine deutliche Verkleinerung beim Vorhalten und eine Vergrößerung beim Entfernen der Gläser zu konstatieren. Auch hier scheint wohl ein Akkommodations- und Konvergenzimpuls aufzutreten, der als Verkleinerung empfunden wird. Die Verkleinerung wird auch beobachtet, wenn im hellen Raum die Gläser so weit entfernt vom Auge gehalten werden, daß die Änderung der Pupillen nicht merkbar ist: das deutet auf den Einfluß der Sehschärfe hin.

Über weitere Versuche in dieser Richtung, die mehr physiologisches als physikalisches Interesse haben, wie auch über Experimente zur Erzielung einer Mikropsie unter anderen Bedingungen und ihren Zusammenhang mit der Sehschärfenänderung, die hier ebenfalls von Bedeutung ist, wird an anderer Stelle berichtet werden.

Zusatz bei der Korrektur: In einer unterdessen erschienenen Mitteilung (diese Zeitschr. 1920, S. 262) sucht Herr Jaeckel den Versuch 1 (s. o.) durch Blendenwirkung zu erklären; meine Versuche in dieser Richtung stimmen mit denen Herrn Jaeckels überein, doch reicht diese Erklärung nicht hin, den Versuch 2 zu deuten. Auch zeigten Versuche, die wir bei ausgeschalteter Pupillenwirkung ausführten, daß der Sehschärfenänderung dieselbe Bedeutung zukommt, wie der Pupillenänderung. Seitliche Blendung z. B., die eine Verminderung der Sehschärfe bewirkt, hatte bei Personen mit atropinisierter oder pathologisch lichtstarren Pupillen scheinbare Verkleinerung der betrachteten Gegenstände zur Folge; bei Verbesserung der Sehschärfe (z. B. Verwendung einer stenopäischen Lücke bei Ametropen) trat scheinbare Vergrößerung ein. (Auf den Einfluß der Pupillenweite auf die Sehschärfe soll hier nicht näher eingegangen werden.) — Schließlich sei noch erwähnt: in der Formel für den Einstellabstand a bei der Hintertiefe ∞, die z. B. Herr Jaeckel in der Form $\beta \cdot p = a$ benützt, ist β von der Sehschärfe abhängig und a ändert sich bei festgehaltenem Pupillendurchmesser p mit der Sehschärfe (β).

Wien I, Physikalisches Institut der Universität, 10. Mai 1920.

(Eingegangen 26. Mai 1920.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Neuere Arbeiten über Beugung an Zylindern und Gittern.

Von H. Spohn.

(Fortsetzung.)

In Fig. 4 sind mehrere Beispiele für einen dielektrischen Zylinder (aus Wasser) graphisch dargestellt. (Daß in diesem Beispiele dielektrisches Material gewählt wurde, ist für die bisher festgestellten Ergebnisse belanglos.) Als Ordinaten sind die Werte von $\overline{\mathfrak{E}^2}$ in Prozenten der freien Strahlung, als Abszissen die Werte von r aufgetragen. Die Kurven zu den Zylinderradien $\varrho = 0{,}15 - 0{,}70$ cm gehören dem

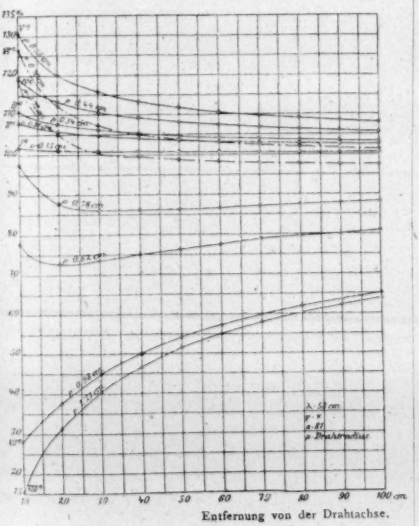


Fig. 4.

Typus I, die zu 0,78—1,21 cm Radius ϱ dem Typus II, die zu 0,72 cm Radius ϱ dem Typus III an. Der Interferenzpunkt der letzten liegt etwa bei $r = 28$ cm.

Weitere der Messung zugängliche Einzelheiten sind durch Diskussion der Lösung mit allgemeinen Koeffizienten nicht zu erschließen. Die speziellsten Teilergebnisse sind schließlich nur durch numerische Ausrechnung der Koeffizienten zu erhalten. Doch können noch vor dieser die Koeffizienten auf eine durchsichtigere Form gebracht werden, wenn man für die Funktion $I_m(\varkappa_1)$ und $H_m^{(2)}(\varkappa_2)$ Näherungswerte einführt, deren Einführung durch die allgemeinen Versuchsverhältnisse durchaus gerechtfertigt wird.

Bei der Mehrzahl der für den vorliegenden Gegenstand verwirklichten Anordnungen ist $\varrho \ll \lambda$. Dann ist das Argument $\varkappa_1 = \frac{2\pi\varrho}{\lambda}$ eine sehr kleine Zahl; die Besselschen und Hankelschen Funktionen mit diesem Argumente können daher durch ihre bequemen Grenzfunktionen für kleines Argument ersetzt werden.

Weiterhin aber muß danach unterschieden werden, je nachdem das Material der beugenden Zylinder 1. von praktisch ∞ Leitfähigkeit, oder 2. endlich leitend, oder 3. dielektrisch ist.

Der erste Fall ist formell der einfachste. Denn für ihn ist $k_2 = \infty$ zu setzen, die Formel (6c) nimmt also die schon wesentlich einfachere Form an:

$$\underset{\sigma=\infty}{a_m} = -2i^m \frac{I_m(\varkappa_1)}{H_m^{(2)}(\varkappa_1)}. \qquad (10)$$

Der zweite Fall bleibt für $\varrho \ll \lambda$ ebenfalls praktisch einfach, da die Koeffizienten a_m so rasch abnehmen, daß meistens schon a_1 vernachlässigt werden, d. h. die Reihe auf das erste Glied beschränkt bleiben kann.

Der dritte Fall bleibt rechnerisch der verwickeltste. Das entspricht der experimentellen Tatsache, daß der Fall des dielektrischen Zylinders weitaus die vielseitigsten experimentellen Einzelheiten aufweist.

Im ersten Falle ist zunächst noch ein allgemeiner Schluß möglich. Es ist

$$\frac{i\pi}{2} H_m^{(2)}(x) = \frac{i\pi}{2} I_m(x) - K_m(x)^{1}),$$

wo $I_m(x)$ und $K_m(x)$ bei reellem Argument reelle Werte behalten. Daher wird in Formel (6d)

$$a_m + i\beta_m = I_m(\varkappa_1) \frac{K_m(\varkappa_1) + \frac{i\pi}{2} I_m(\varkappa_1)}{K_m(\varkappa_1)^2 + \frac{\pi^2}{4} I_m(\varkappa_1)^2},$$

und daher

$$a_0^2 + \beta_0^2 + \frac{2}{\pi}\beta_0, \quad \underset{m>0}{a_m^2 + \beta_m^2} = \frac{4}{\pi}\beta_m,$$

also

$$E_3 = -E_1 \cdot \cdot, \qquad (11)$$

d. h. die vom Zylinder absorbierte Energie ist dem Betrage nach dem von ihm

1) Vgl. Jahnke u. Emde, Funktionentafel.

reflektierten gleich. Dieses Ergebnis hat hier nur den Wert einer Probe für die Richtigkeit der Rechnung. Denn $E_3 + E_2$ stellt [8] die gesamte durch die Anordnung verzehrte Energie dar. Die Formeln für E_3 und E_2 wurden unter der Voraussetzung abgeleitet, daß keine Hysteresisverluste stattfinden. Also könnte nur solche durch Joulesche Wärme auftreten. Diese ist ja durch die Definition dieses Falles (Leitfähigkeit $\sigma = \infty$) ausgeschlossen, also muß der Gesamtenergieverbrauch $= 0$ sein.

Um einzeln die Beträge E_3 und E_2 ausrechnen zu können, sind nunmehr die Werte für die Koeffizienten auszurechnen. Diese sind unter den Voraussetzungen des Falles

$$\frac{I_0(\varkappa_1)}{H_0^{(2)}(\varkappa_1)} = \frac{\varkappa i}{2} \frac{1}{-\log \frac{\lambda}{\pi \gamma \varrho} + i\pi/2}, \quad (12a)$$

($\gamma = 1{,}7811 =$ Mascheronische Konstante)

$$\frac{I_n(\varkappa_1)}{H_n^{(2)}(\varkappa_1)} = -\frac{i\pi}{2} \frac{2n}{2^{2n}(n!)^2} \varkappa_1^{2n}. \quad (12b)$$

Man sieht, daß unter den Voraussetzungen des Falles schon das Glied mit a_1 nur noch weit unter der Beobachtungsgrenze liegende Störungen veranlassen kann, die Beschränkung auf das erste Glied also durchaus berechtigt ist. Und mit dieser Einschränkung ergibt sich:

$$E_3 = -E_2 = \frac{\lambda}{16c} \frac{1}{\log \frac{\lambda}{\pi \varrho \gamma} + \frac{\varkappa^2}{4}}.$$

Interessant ist an dieser Formel, daß sie ein ständiges Anwachsen der Absorption mit steigender Wellenlänge zum Ausdruck bringt.

Einen weiteren Nutzen wird diese Formel noch im Vergleich mit der entsprechenden für den Fall eines zur Zylinderachse senkrecht polarisierten Wellenzuges bringen.

An dieser Stelle kann die Betrachtung des Zylinders aus absolut leitfähigem Material verlassen werden.

Im zweiten Falle (Zylindermaterial von endlicher Leitfähigkeit) wird das Argument $\varkappa_2$ komplex, und zwar wird, wenn man

$$\frac{\lambda^2}{4\pi^2} k_2^2 = \varepsilon - \frac{2 i \sigma \lambda}{c} = (\nu - i\varkappa)^2$$

setzt, ν der gewöhnliche Brechungsexponent, $\varkappa$ der „Extinktionskoeffizient" genannte Parameter. Im Gebiete der ultraroten Strahlung sind die beiden Zahlen von der nämlichen Größenordnung. Schon bei einigermaßen großer Wellenlänge ($\lambda \sim 10^3\, \varrho$) besteht kein meßbarer praktischer Unterschied mehr zwischen diesem und dem ersten Falle. Allgemein erhält man, wenn

$$(\nu - i\varkappa) \frac{2\pi\varrho}{\lambda} = \varkappa_2$$

als große Zahl anzusehen ist, die für diesen Fall gültigen Koeffizienten aus den vorigen durch die Beziehung:

$$a_{0,\nu,\varkappa} = a_{0,\infty} \frac{2 i \varkappa_2 \log - \frac{2i}{\gamma \varkappa_1} - \varkappa_1^2}{2 i \varkappa_2 \log - \frac{2i}{\gamma \varkappa_1} + 2},$$

$$a_{m,\nu,\varkappa} = a_{m,\infty} = \frac{1}{1 + \frac{2m}{\varkappa_2}}.$$

Aber auch wenn $\varkappa_2$ noch als kleine Zahl gelten kann, können die Koeffizienten a_m als Vielfache der unter (12a) und (12b) angegebenen Größen angegeben werden. Daraus schließt man sofort, daß auch für diesen Fall schon die a_1 vernachlässigt werden können; und mit der so gerechtfertigten Beschränkung auf das erste Glied der Entwicklung in (6a) erhält man für den zeitlichen Mittelwert $\overline{\mathfrak{E}_x^2}$ durch leichte Rechnung [16]:

$$\overline{\mathfrak{E}_x^2} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\pi^2 \varrho^2}{\sqrt{r\lambda}} \sqrt{a} (\nu^2 - \varkappa^2 - 1 - 2\nu\varkappa) \right\}. \quad (14)$$

Der Ausdruck

$$\nu^2 - \varkappa^2 - 1 - 2\nu\varkappa$$

ist nun im ganzen sichtbaren und ultraroten Gebiete für alle Metalle wesentlich negativ. Für das langwellige ultrarote Gebiet und das Gebiet elektromagnetischer Wellen im engeren Sinne ist das besonders leicht einzusehen.

Wir haben also in diesem Gebiete, vorausgesetzt, daß die allgemeinen Einschränkungen über $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ erfüllt sind, stets den Typus II der voraufgegangenen allgemeinen Diskussion, d. h. im Zentralbilde hinter einem metallischen Stabe stets „Schatten".

W. Seitz ist zu dieser speziellen Fragestellung zunächst durch ihre Bedeutung für die Funkentelegraphie geführt worden. Von einer Fortsetzung bzw. einer engeren Einstellung der Diskussion nach dieser Richtung muß hier abgesehen werden.

Der experimentell ausgiebigste Fall ist nun der eines beugenden Zylinders aus dielektrischem Material. Die eben mit Formel (13) für den „metallischen Fall" durchgeführte Diskussion des Energieverbrauchs wird hier beiseite gelassen, weil sie weiterhin für den „dielektrischen Fall" noch in anderer Form durchgeführt wird. Für die dielektrischen Materialkonstanten liegt der Fall so, daß zwar einerseits der komplizierte Aufbau (6a) für die Koeffizienten keiner allgemeinen Vereinfachung fähig

ist, dafür aber die numerische Durchrechnung zwar immer noch umständlich, aber von jeder wünschenswerten Wohldefiniertheit und Empfindlichkeit des die Eigenarten verschiedenen, dielektrischen Materials kennzeichnenden Zahlenmaterials ist.

Die Fig. 4, S. 501, regt die Frage an, wie die Schattenwirkung, einmal für ein bestimmtes ϱ erreicht, mit wachsendem ϱ sich ändert. Die numerische Durchrechnung hat die Fig. 5 und 6 geliefert. Zu ihrem Verständnis ist folgendes vorauszuschicken: Aus der Herleitung der drei Typen folgt, daß das Verhalten der

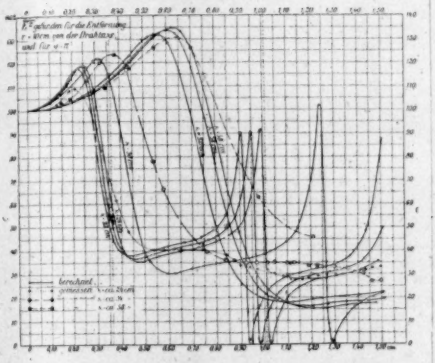


Fig. 5.

Strahlungsintensität in einem einzigen Punkte hinter dem Zylinder zur Kenntnis des Gesamtcharakters der Erscheinung genügt, außer in dem Falle des Auftretens eines Indifferenzpunktes, von dessen Auftreten oder Nichtauftreten man sich schon nach Berechnung der ohnehin nötigen Koeffizienten a_m ohne besondere Mühe überzeugen kann. Wegen dieses allgemeinen Verhaltens ist für Fig. 5 der zeitliche Mittelwert der elektrischen Intensität hinter dem Zylinder in Prozenten der freien Intensität nur für den einzigen Punkt $r = 10$ cm, d. h. 10 cm hinter der Zylinderachse in Richtung des einfallenden Wellenzuges berechnet worden [14]. Diese Intensitätsprozente sind als Ordinaten, die Zylinderradien ϱ als Abszissen aufgetragen. Der Rechnung wurden die Wellenlängen 22, 23, 24, 30, 52, 56, 58 cm zugrunde gelegt.

Alle Kurven haben den nämlichen Charakter, wie es ja nach dem oben formulierten Ähnlichkeitssatze sein muß.

Die drei in Fig. 5 ebenfalls eingezeichneten beobachteten Kurven [14] schließen sich dem ersten Auf- und Abstieg der theoretischen Kurve sehr gut an, um so schlechter ist die Übereinstimmung der zweiten Maxima und Minima; dafür wird später die voll ausreichende Erklärung gegeben.

Die theoretischen Kurven in Fig. 5 veranschaulichen nun die errechnete Energieverteilung erst in einiger Entfernung vom Zylinder, während ja gerade die Energieverteilung an der Zylinderoberfläche als der durch den Zylinder herbeigeführte Zwangszustand, die eigentliche Ursache der hier betrachteten Erscheinungen ist und daher besonderes Interesse beansprucht. Daher ist in Fig. 6 und 7 noch ein Bild der sehr merkwürdigen Energieverteilung an der Zylinderoberfläche gegeben. Der Mittelwert der resul-

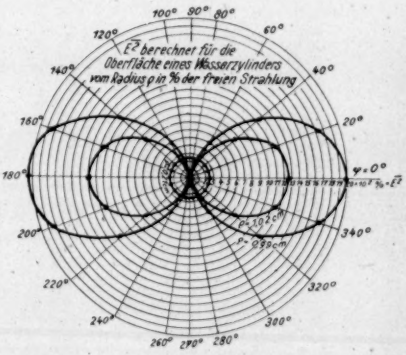


Fig. 6.

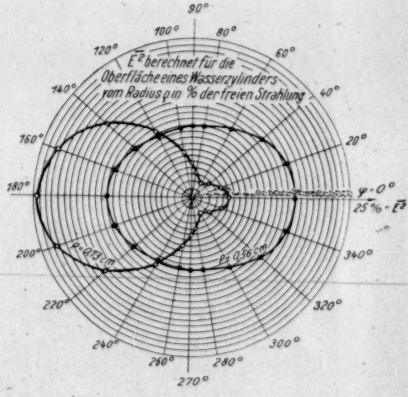


Fig. 7.

tierenden Intensität ist wiederum in Prozenten der „freien" Intensität eingetragen, und zwar für die Wellenlänge $\lambda = 24$, die D.-K. $= 81$, (Wasser $= 1$), bei den fünf verschiedenen Zylinderradien $\varrho = 0{,}21$ cm, 0,56 cm, 0,73 cm, 1,02 cm (in der Figur vermerkt).

Die Energieverteilung in Prozenten der freien Strahlung kann nun ganz verschiedene Größenordnungen annehmen (in den gezeichneten Beispielen von 0—2000 Proz.). Deshalb mußten hier den Raumverhältnissen zuliebe zwei verschiedene Bilder in verschiedenem Maßstabe gegeben werden. Der von Fig. 6 bei $\varrho =$ 0,21 cm, 0,99 cm, 1,02 cm ist hundertmal so klein wie der von Fig. 7 ($\varrho = 0{,}73$ cm, 0,56 cm).

Beachtenswert ist besonders auch, wie grundverschieden sich die Oberflächenenergie räumlich nach den verschiedenen Richtungen verteilt, von zentrisch kreisförmiger Form ($\varrho =$ 0,21 cm) zu völlig exzentrischer quasi-elliptischer ($\varrho = 0{,}73$ cm, $\varrho = 0{,}56$ cm) und schließlich etwa lemniskatischer Form. Besser als jede Schilderung zeigen im übrigen die Kurven die eigenartige Energieverteilung an der Oberfläche.

Wertvoll ist der Vergleich der Fig. 6 und 7 mit 5. Das erste Maximum zeigt sich in Fig. 5 bei $\varrho = 0{,}22$, hier bei 0,21, das erste Minimum bei 0,5, hier bei 0,56 und 0,73 usw. Die auffallenden Maxima und Minima der Intensitätsverteilung hinter dem Zylinder in Abhängigkeit vom Zylinderradius sind also offenkundig verursacht durch die merkwürdige Energieverteilung an der Oberfläche des Zylinders. Und die Eigenart dieser Verteilung wiederum läßt sich nur durch die Befähigung des Zylinders zu elektromagnetischen Eigenschwingungen dartun.

Deren Untersuchung hat von der nämlichen Differentialgleichung und den Raumbedingungen (2a), (2c) auszugehen. In (2d) dagegen ist die rechte Seite $= 0$ zu setzen, da für diese Betrachtung ja eine „erregende" Welle nicht existiert. Setzt man alsdann ganz entsprechend die Lösung in der Form an

$$\mathfrak{E} = e^{i\nu t} \sum_{m}^{0,\infty} Q_m(r) \cos m\varphi,$$

so folgt schon aus natürlichen Erwägungen, die weiterhin ihre rechnerische Bestätigung finden, daß hierin ν komplex zu setzen ist. Die Ausführung dieses Gedankens liefert schließlich ∞^2 gedämpfte Eigenschwingungen.

(Fortsetzung folgt.)

Tagesereignisse.

Naturforscher-Versammlung in Nauheim (vgl. auch diese Zeitschrift **21**, 392, 1920; **21**, 447, 1920; **21**, 472, 1920).

Neu angemeldete Vorträge: **43.** G. Hertz (Berlin): Über die Absorptionsgrenzen der L-Serie, **44.** H. Dingler (Augsburg): Kritische Bemerkungen zu den Grundlagen der Relativitätstheorie, **45.** F. P. Liesegang (Düsseldorf): Ein Schaubild zur Darstellung der Raum-Zeit-Verhältnisse in der speziellen Relativitätstheorie, **46.** R. Pohl (Göttingen): Lichtelektrische Leitfähigkeit von Kristallen, **47.** K. Fehrle (Säckingen): a) Die physikalische Bedeutung der Atomreste, b) Eine neue Theorie der Serienspektren, **48.** Reichenbächer (Wilhelmshafen): Die Krümmung der Lichtstrahlen in folgender Gravitation, **49.** H. Dember (Dresden): Über Beeinflussung der Lichtelektrizität im Innern eines Metalls.

Außerdem wird F. Rinne (Leipzig) in der Montagssitzung zusammenfassend über den Feinbau der Kristalle berichten.

Die Technische Hochschule Aachen begeht am 24. Oktober 1920 die Feier ihres **50jährigen Bestehens.**

„Die Gesellschaft von Freunden der Aachener Hochschule", Geschäftsstelle Düsseldorf, Ludendorffstraße 27, wendet sich aus diesem Anlaß an die alten und jungen Studenten, sowie an alle sonstigen Interessenten mit der Bitte um Beitritt, um dadurch die Bestrebungen der Gesellschaft zu unterstützen.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der erste Observator der Sternwarte der Universität Leipzig Dr. Friedrich Hagen zum a. o. Professor für praktische Astronomie ebenda, der ord. Professor der Physik an der Universität Greifswald Dr. Johannes Stark in gleicher Eigenschaft an der Universität Würzburg, der Privatdozent für reine und angewandte Mathematik an der Universität Hamburg Dr. Jacob Nielsen zum ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Breslau, die a. o. Professoren an der Universität Frankfurt/Main Dr. Karl Mannich (Pharm. Chemie), Dr. Ernst Hellinger (Reine und angewandte Mathematik), Dr. Franz Linke (Geophysik und Meteorologie), Dr. Erich Ebler (Anorganische und analytische Chemie zu ord. Professoren ebenda, der Professor der Physik Ernest Fox Nichols an der Yale University zum Direktor eines neu eingerichteten wissenschaftlichen Laboratoriums (Nela Research Laboratory) der National Electric Lamp Association.

Habilitiert: An der Technischen Hochschule München Dr. Ernst v. Angerer für Experimentalphysik, an der Technischen Hochschule Stuttgart Dr. Hans Reichenbach für Physik und Dr.-Ing. Winfried Schumann für Hochspannungstechnik und Elektrotechnik, an der Universität München Dr. Hans Kienle für Astronomie.

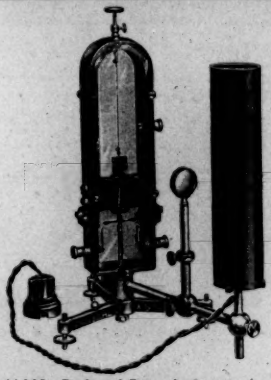
Verliehen: Dem Privatdozenten der Chemie an der Universität Tübingen Dr. Percy Brigl der Titel a. o. Professor.

Gestorben: Der frühere Direktor des South Kensington Observatoriums in London Sir Norman Lockyer (der Entdecker des Heliums), der frühere ord. Professor für Experimentalphysik an der Universität Dorpat (zuletzt Honorarprofessor für Physik an der Universität Leipzig) Dr. Artur von Oettingen, der Direktor der Brera-Sternwarte Professor Dr. Giovanni Celoria in Mailand.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. Peter Debye in Zürich. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

Max Kohl A.G. Chemnitz

Volleingezahltes Kapital Mk. 1600000.



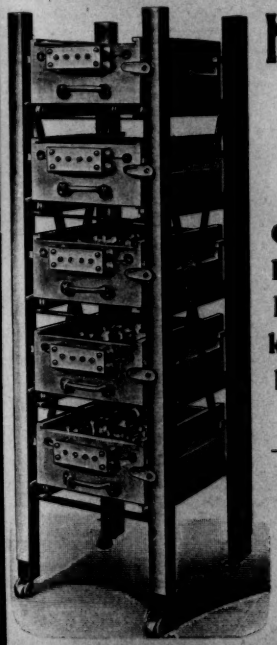
61392. Drehspul-Spiegelgalvanometer.

Physikalische Apparate

Funken-Induktoren
Ölluftpumpen
Experimentier-Schalttafeln
Projektions-Apparate
Laboratorienmöbel

in gediegener Ausführung.

Weltausstellung Brüssel 1910: 4 Grosse Preise; Turin 1911: 2 Grosse Preise; Dresden 1911: Grosser Preis.



Hochspannungs-Batterien

Vorzüge:

Größte Leistung bei kleinstem Raum ❖ Beliebige Trennbarkeit ❖ Leichte Beweglichkeit ❖ Niedriger Preis

Physikalische Werkstätten

Aktiengesellschaft

Göttingen 1

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

Soeben erschien in neuer vermehrter Auflage:

Über Relativitätsprinzip, Äther, Gravitation

von

P. Lenard

Heidelberg

Preis: 5 Mark

Der Verfasser behandelt die genannten Gegenstände vom Standpunkt des Naturforschers, der mehr von der Erfahrung aus der materiellen Welt als von philosophischen Bedürfnissen sich geleitet fühlt. Er gründet sein Weltbild nicht auf bloße mathematische Gleichungen, sondern auf Mechanismen. In dieser von der gewöhnlichen Art abweichenden Behandlung der Materie liegt der hohe Wert der Schrift.

Inhaltsverzeichnis:

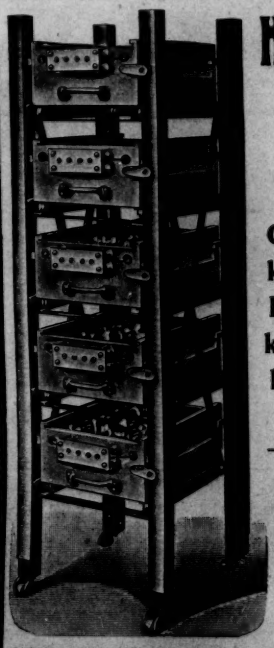
(B. = Besprechung, Z. B. = Zusammenfassende Bearbeitungen.)

Seite

Alt, E., Die Wettervorhersage; ihre Geschichte, ihr gegenwärtiger Stand und die Richtung ihrer Fortentwickelung. (B.) 527
Atome: Über die Erklärung der Röntgenspektren und die Konstitution der —, v. A. Smekal 505
Bucherer, A. H., Berichtigung zu meiner Theorie der Rotverschiebung 518
Dorno, C., Physik der Sonnen- und Himmelsstrahlung. (B.) 527
Gitter: Neuere Arbeiten über Beugung an Zylindern und —, v. H. Spohn. (Z. B.) Schluß. 518
Hess, V. F., Über zwei einfache Vorlesungsversuche zur Demonstration des Ionenwindes 510
Himmelsstrahlung: Physik der Sonnen- und —, v. C. Dorno. (B.) 527
Infinitesimalrechnung: Einführung in die —, v. G. Kowalewski. (B.) 528
Ionenwind: Über zwei einfache Vorlesungsversuche zur Demonstration des —, v. V. F. Hess 510
Kathodenstrahlen: Die Erzeugung von Röntgenstrahlen durch — in Luft von gewöhnlicher Dichte, v. W. Wolff 507
Kowalewski, G., Einführung in die Infinitesimalrechnung. (B.) 528
Licht: Das Wesen des —, v. M. Planck. (B.) . . 528
Luft: Die Erzeugung von Röntgenstrahlen durch Kathodenstrahlen in — von gewöhnlicher Dichte, v. W. Wolff 507

Seite

Mohorovičić, S., Ein Beitrag zur Theorie des Sehraumes 515
Niveauflächen: Beiträge zur geometrischen Verzeichnung von —, v. Th. Thorkelsson 513
Planck, M., Das Wesen des Lichtes. (B.) 528
Röntgenspektren: Über die Erklärung der — und die Konstitution der Atome, v. A. Smekal 505
Röntgenstrahlen: Die Erzeugung von — durch Kathodenstrahlen in Luft von gewöhnlicher Dichte, v. W. Wolff 507
Rotverschiebung: Berichtigung zu meiner Theorie der —, v. A. H. Bucherer 518
Sehraum: Ein Beitrag zur Theorie des —, v. S. Mohorovičić 515
Smekal, A., Über die Erklärung der Röntgenspektren und die Konstitution der Atome 505
Sonnenstrahlung: Physik der — und Himmelsstrahlung, v. C. Dorno. (B.) 527
Spohn, H., Neuere Arbeiten über Beugung an Zylindern und Gittern. (Z. B.) Schluß. 518
Thorkelsson, Th., Beiträge zur geometrischen Verzeichnung von Niveauflächen 513
Wettervorhersage: Die —; ihre Geschichte, ihr gegenwärtiger Stand und die Richtung ihrer Fortentwickelung, v. E. Alt. (B.) 527
Wolff, W., Die Erzeugung von Röntgenstrahlen durch Kathodenstrahlen in Luft von gewöhnlicher Dichte 507
Zylinder: Neuere Arbeiten über Beugung an — und Gittern, v. H. Spohn. (Z. B.) Schluß. 518



Hochspannungs-Batterien

Vorzüge:

Größte Leistung bei kleinstem Raum ◆ Beliebige Trennbarkeit ◆ Leichte Beweglichkeit ◆ Niedriger Preis

Physikalische Werkstätten

Aktiengesellschaft

Göttingen 1

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

Soeben erschien
in neuer vermehrter Auflage:

Über Relativitätsprinzip, Äther, Gravitation

von

P. Lenard

Heidelberg

Preis: 5 Mark

Der Verfasser behandelt die genannten Gegenstände vom Standpunkt des Naturforschers, der mehr von der Erfahrung aus der materiellen Welt als von philosophischen Bedürfnissen sich geleitet fühlt. Er gründet sein Weltbild nicht auf bloße mathematische Gleichungen, sondern auf Mechanismen. In dieser von der gewöhnlichen Art abweichenden Behandlung der Materie liegt der hohe Wert der Schrift.